

# 水素原子内の電子のエネルギー-運動量の関係式

須藤晃俊

特殊相対論を代表するアインシュタインのエネルギー-運動量の関係式は、自由空間の孤立系で成立するが、ポテンシャル・エネルギーを有する原子内の電子の振る舞いを記述する理論は、ディラック方程式に代表される量子力学であると考えられている。

しかし、本論は自由空間で成立するアインシュタインの関係式と類似した関係式が、水素原子内でも成立しているとするれば、それは一体どんな関係式かとの設問を設定して、その関係式を導いた。

本論で新たに導いた関係式は、量子力学を補完する可能性があり、重要であると考えられる。

**キーワード：** 水素原子；アインシュタインのエネルギー-運動量の関係式；特殊相対論；  
ディラックの相対論的量子力学；静止質量エネルギー；相対論的エネルギー；  
ポテンシャル・エネルギー。

## 1. 序 論

一般に原子内の電子の振る舞いを最も良く記述する物理学の理論は、量子力学であると考えられている。

著者もその考えに異論はないが、さらにアインシュタインのエネルギー-運動量の関係式が、原子内でも成立するか否かという設問を提案し、それに答えることにする。

ところで、量子力学では、水素原子の電子の運動は古典的運動とは考えられず、実際には定常波  $\psi$  で表される。さらには、 $|\psi^*\psi|$  が陽子の周囲で対称であり、かつ、時間依存性がない。このとき、荷電分布は完全に静的(古典的運動がない)になる。

しかし、この設問は量子力学が未完成であった 1920 年代に提案され、答えるべきであった。

このような理由により、本論で前期量子論の描像(古典的運動)を用いて新しい関係式を導くことは、許されるところである。

## II. アインシュタインの関係式が水素原子内では成立しないことの確認

自由空間で静止している一つの電子について考える。アインシュタインによれば、この状態にある電子が持っているエネルギーは、静止質量エネルギー $E_0$ 、すなわち、 $m_e c^2$ である[1]。

この電子が光子のエネルギーを吸収すれば、電子は運動エネルギーを獲得する。

いま電子の相対論的エネルギーを  $E$ 、運動量を  $p$  とすれば、次のアインシュタインのエネルギー-運動量関係式が成立する。

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2. \quad (1)$$

勿論、この場合には、 $E > E_0$  である。

しかしながら、もし静止している電子が水素原子の原子核、すなわち陽子に引き付けられる場合には、電子に何が起こるのであろうか？

このとき、電子は外部からエネルギーを吸収することなしに、自ら光子を放出し、同時に、放出した光子のエネルギーと同量の運動エネルギーを獲得する。

前期量子論では、水素原子内の電子の全エネルギー( $E_n$ )と運動エネルギー( $K$ )との関係は、以下のようになる。

$$E_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (2a)$$

$$= \frac{E_1}{n^2} \quad (2b)$$

$$= -\frac{K_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2c)$$

ここで、 $n$  は主量子数である。

この場合、電子の全エネルギーは、マイナスの値をもつ (Appendix A 参照)。

前期量子論では、電子の全エネルギーは、電子が原子核から引き離されて、無限遠の位置に静止したときをゼロと考える。

式(2a)の全エネルギーは、この観点から得られた値である。

古典力学では、エネルギーの相対的な差だけが強調され、絶対的なエネルギーについては、問題にしない。

しかしながら、たとえ電子を原子核から無限遠の位置まで引き離し、そこに静止させたとしても、電子の相対論的なエネルギーは、本来ゼロではない。

アインシュタインによれば、このとき電子は、静止質量エネルギーをもつはずである。量子力学の教科書によれば、相対論的波動方程式であるディラック方程式から得られる水素原子のエネルギー固有値は、次のようになる[2]。

$$E = m_e c^2 \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4} \left( \frac{n}{|k|} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (3)$$

ここでは、エネルギーが絶対的な尺度で記述されていることに気づくことが、重要である。

水素原子の場合には、 $Z=1$  だから、 $\gamma = e^2 / \hbar c$  となり、微細構造定数と一致する (ただし、 $\gamma$  は  $Ze^2 / \hbar c$ )。

もし、この方程式の第3項を無視して近似を取れば、式(3)は次のように書ける。

$$E \approx m_e c^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2 n^2} \quad (4a)$$

$$= m_e c^2 + E_n. \quad (4b)$$

さらに、式(B4)の  $E$  は電子の静止質量エネルギーを含み、絶対的な尺度で定義されている (Appendix B 参照)。

静止していた電子が自由空間で運動を始める場合も、また、その電子が原子内に取り込まれる場合も、最初の始点となる電子のエネルギーは、静止質量エネルギーである。そして、前者のエネルギーは、 $E > m_e c^2$ 、後者のエネルギーは、 $E < m_e c^2$  となる。

以上の考察によって、水素原子内では、アインシュタインの関係式(1)が成立しないことが明らかになった。しかし、物理学者は通常そのことを問題にはしない。

現在では、自由空間の粒子のエネルギーと運動量を記述する式は、アインシュタインの関係式(1)であるが、原子内での電子の振る舞いを記述する方程式は、ディラック方程式に代表される量子力学であるとの見解が定着している。

しかし、本論はディラック方程式の重要性を認めた上で、対称性の観点から、「自由空間で成立するアインシュタインの関係式に類似した関係式が、水素原子内でも成立していないか？ もし、そのような関係式が成立しているとすれば、それは一体どんな関係式か？」との設問を提示した。

水素原子内の電子の運動を記述するには、式にポテンシャル・エネルギーの項も組み込まなければならない。

幸いにも、著者は別の論文において、水素原子内の電子のポテンシャル・エネルギー

は、電子の静止質量エネルギーの減少分に一致することを指摘した[3].

すなわち,

$$V(r) = -\Delta m_e c^2. \quad (5)$$

本論で水素原子内の電子の振る舞いを記述する関係式を導く際には、この関係も考慮する。

### III. 水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係式

式(1)は、特殊相対論を代表する最も重要な関係式である。

ここでは、孤立系で静止している電子が、外部からエネルギー(光子)を吸収して運動を始める場合を考える。

この場合には、電子の相対論的エネルギーと運動量と静止質量エネルギーの関係は、以下ようになる。

$$(mc^2)^2 = c^2 p^2 + (m_e c^2)^2. \quad (6)$$

式(1)を導くときには、次の関係が出発点となる[4].

$$dE = v dp. \quad (7)$$

マクロの空間を粒子が通過するとき、それが孤立系であれば、その速度が増加すれば、粒子の運動エネルギーと相対論的エネルギーは、増加する。

古典力学では、運動エネルギーの増加は外部の力によって行われた仕事に対応するから、次の式を得る。

$$dK = F dx \quad (8a)$$

$$= \frac{dp}{dt} dx \quad (8b)$$

$$= v dp. \quad (8c)$$

また、この状況では、粒子の相対論的エネルギーと運動エネルギーは増加するが、両エネルギーの増加分は等しい。すなわち、

$$dE = dK. \quad (9)$$

式(7)は、式(8c)と(9)から求めることができる。

次に、マクロな空間で水素原子の原子核(陽子)から無限の距離に静止している電子が、陽子の電気力によって引き付けられ、水素原子を生成する場合を想像しよう。

このとき、電子は原子外に光子を放出して、エネルギーを減少させるが、同時に減少したエネルギーと同量の運動エネルギーを獲得する。

つまり、式(A5c)から次の関係式が導ける。

$$-dE = dK. \quad (10)$$

また、式(8c)と(10)から次の式が得られる。

$$-dE = vdp. \quad (11)$$

アインシュタインの関係式(1)を導くときには、式(7)から出発するが、水素原子内で成立する関係式を導くときには、式(11)から出発しなければならない。

ここで、特殊相対論の教科書を参照して、水素原子内の電子のエネルギー-運動量の関係式を導いてみよう[5]。

ニュートン力学では、

$$m = \frac{p}{v}. \quad (12)$$

また、特殊相対論から、

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (13)$$

さらに、式(13)がエネルギーと慣性質量の普遍的な等価性を記述していると考え、式(12)と(13)を一つに結合することができる。

$$E = \frac{c^2 p}{v}. \quad (14)$$

次に、式(11)と(14)の左辺と右辺どうしを掛けると、次の式が得られる。

$$EdE = -c^2 p dp. \quad (15)$$

これを積分すると、

$$E^2 = -c^2 p^2 + \text{const}. \quad (16)$$

次に、式(16)の積分定数とエネルギー $E$ を決定しよう。

本来、この積分定数の値は、実験によって決定すべきである。しかしながら、式(1)との類推から、式(16)の積分定数は、 $(m_e c^2)^2$ であると予測できる。

したがって、式(16)は次のようになる。

$$E^2 + c^2 p^2 = (m_e c^2)^2. \quad (17)$$

次に、原子内で成立するエネルギー-運動量の関係式を導くためには、電子のエネルギーを絶対量で定義しなければならない。

本論では、水素原子内の電子の絶対的な尺度で記述した相対論的エネルギー  $E_{re,n}$  を以下のように定義する。

$$E_{re,n} = m_e c^2 + K_n + V(r_n) \quad (18a)$$

$$= m_e c^2 + \frac{V(r_n)}{2} \quad (18b)$$

$$= m_e c^2 + E_n, \quad n=1,2,\dots, E_n < 0. \quad (18c)$$

左辺の  $n$  と一致させるために、右辺の  $K$  と  $r$  にも添え字  $n$  を付ける。

一方、 $E_n$  はボーアが導いた水素原子のエネルギー値である。そして、この値は式(18c)からも分かるように、式(3)の第3項を無視した近似値であることが分かる。

いま式(17)の  $E$  に式(18c)を代入すると、式(17)は次のように書ける。

$$E_{re,n}^2 + c^2 p_n^2 = (m_e c^2)^2. \quad (19)$$

$$\left( m_e c^2 + \frac{V(r_n)}{2} \right)^2 + c^2 p_n^2 = (m_e c^2)^2. \quad (20)$$

$$(m_e c^2 + E_n)^2 + c^2 p_n^2 = (m_e c^2)^2, \quad n=1,2,\dots, E_n < 0. \quad (21)$$

方程式(18c)は、非相対論的な方程式である。したがって、この式を相対論的な方程式(17)に代入することは、相対論的な方程式と非相対論的な方程式の安易な混合との疑念が生じるかも知れない。しかしながら、式(1)は通常は相対論的な方程式と考えられるが、実際には、相対論的な要求をしないで導くことができる。

式(1)は、非相対論的な速度で動く粒子にも適用できる最も一般的な方程式である。しかしながら、非相対論的な速度で動くものについて説明するときには、近似式  $E(v) \approx mc^2 + (1/2)mv^2$  で代用できるので、通常は式(1)を用いなくてもすむのである。

また、式(19)の場合にも、同じ論理が適用される。この方程式は、エネルギー準位が縮退している原子内の電子のエネルギーと運動量の間係を表している。

#### IV. 関係式(21)の正しさの検証

前章で導いた関係式(21)の正確さを確かめるために、この章ではいくつかの計算を行

う。

最初に、前期量子論と本論の結果を用いて、主量子数  $n$  のエネルギー状態にある電子の運動量  $p_n$  を計算する。非相対論的な速度で運動していて、主量子数  $n$  のエネルギー状態にある電子の運動エネルギー  $K_n$  と運動量  $p_n$  の間には、次の関係がある。

$$K_n \approx \frac{p_n^2}{2m_e}. \quad (22)$$

式(2a)の右辺に式(22)の  $K_n$  を代入すると、次の式を得る。

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \approx \frac{p_n^2}{2m_e}. \quad (23)$$

これより、次の式が得られる。

$$p_n \approx \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{m_e e^2}{n\hbar}. \quad (24)$$

次に、式(21)から  $p_n$  を導くが、式(21)の左辺は次のように展開できる。

$$(m_e c^2 + E_n)^2 + c^2 p_n^2 = \left[ m_e c^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \right]^2 + c^2 p_n^2 \quad (25a)$$

$$= \left[ m_e c^2 - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \frac{m_e c^2}{2n^2} \right]^2 + c^2 p_n^2 \quad (25b)$$

$$= \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)^2 (m_e c^2)^2 + c^2 p_n^2. \quad (25c)$$

これより、次の式が得られる。

$$\left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)^2 (m_e c^2)^2 + c^2 p_n^2 = (m_e c^2)^2. \quad (26)$$

ただし、 $\alpha$  は次の微細構造定数である。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (27)$$

式(26)を展開すると、次の式が得られる。

$$p_n^2 = \left( \frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{\alpha^4}{4n^4} \right) (m_e c)^2. \quad (28)$$

ところで、 $\alpha^4 = (5.325 \times 10^{-5})\alpha^2$  だから、ここで、 $\alpha^4 / 4n^4 \approx 0$  と近似すれば、式(28)は次のように書ける。

$$p_n \approx \frac{\alpha m_e c}{n} \quad (29a)$$

$$= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{m_e e^2}{n\hbar}. \quad (29b)$$

以上のように、(21)から導かれた $p_n$ は、前期量子論から得られた結果(24)と一致することが分かった。したがって、関係式(21)は、水素原子内の電子に、適用できることが示された。

## V. ディラック方程式と関係式(19)から導く、水素原子のエネルギーの比較

本章では、先ずディラックの相対論的波動方程式から、水素原子のエネルギー準位を求める方法を量子力学の教科書を引用して確認する[6].

次に、本論で導いた関係式(19)から、水素原子のエネルギーを導き、両者を比較する。

相対論的波動方程式を見つけるという問題に対して、ディラックは次のハミルトニアン形式を出発点に選んだ。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t). \quad (30)$$

運動量と質量の項に関して線形なハミルトニアンの内で、最も簡単なものは、次のものである。

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_e c^2. \quad (31)$$

この式を(30)に代入すると、次の式が得られる。

$$(E - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta m_e c^2)\psi = 0. \quad (32)$$

次に、(32)の $E$ と $\mathbf{p}$ に次の量子化を行う。

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (33)$$

すると、量子化された次の式が得られる。

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \beta m_e c^2 \right) \psi = 0. \quad (34)$$

波動方程式(34)で記述される粒子が電荷 $e$ を持っているときには、常套手段として、

次の置き換えをすれば、相対論的不変性を破壊しないで、電磁ポテンシャルを式(34)に組み込むことができる。

$$c\mathbf{p} \rightarrow c\mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad E \rightarrow E - e\varphi. \quad (35)$$

ここで、 $E$  と  $\mathbf{p}$  は式(33)の演算子を表している。

中心力場 ( $\mathbf{A} = 0$ ,  $\varphi$  は球対称) のような特別な場合には、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(r)$  であるから、次の式が得られる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (36)$$

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_e c^2 + V,$$

ただし、 $V = e\varphi$ 。

この式を(34)のように表現すれば、次のようになる。

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \beta m_e c^2 - V \right) \psi = 0. \quad (37)$$

この方程式から出発して複雑な計算を行うと、次の水素原子のエネルギーの固有値が得られる(詳細な計算は[6]を参照せよ)。

$$E = m_e c^2 \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{(s + n')^2} \right]^{-1/2}, \quad n' = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

ただし、ここでは他の数式と統一を図るため、数式中の  $\gamma$  を  $\alpha$  に置き替えた。また、(38)の正しい量子数は次のようになる。

$$s = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad n = n' + |k|. \quad (39)$$

式(38)を  $\alpha^2$  のべきに展開すると、エネルギー準位の微細構造が明らかになる。

いま式(39)を(38)に代入し、 $\alpha^4$  の項まで取ると、次の式が得られる。

$$E \approx m_e c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{|k|} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (40)$$

$n$  は主量子数、 $n'$  は動径量子数である。そして、 $|k|$  は正の整数値をとることができる。式(40)は、エネルギーが  $|k|$  の増加と共に増加することを示している。

以上がシッフの教科書に出てくる説明である。

本来、この教科書では、 $m$  に添え字  $e$  はなかったが、本論では電子の静止質量と相対論的質量を明確に区別するために、論文全体を統一した。

式(40)で  $n/|k| = 1$  のときには、右辺第3項のカッコ内は  $1/4$  となり、式(40)は次のように

なる。

$$E_n \approx m_e c^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{8n^4} - \dots \right). \quad (41)$$

次は、式(19)から水素原子のエネルギーを求めよう。まず、(19)は次のように書き替えることができる。

$$E_{re,n} = (m_e^2 c^4 - c^2 p_n^2)^{1/2} \quad (42a)$$

$$= m_e c^2 \left( 1 - \frac{p_n^2}{m_e^2 c^2} \right)^{1/2}. \quad (42b)$$

次に、近似式である式(29a)の関係を利用すると、次の式が得られる。

$$E_{re,n} \approx m_e c^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{1/2}. \quad (43)$$

ここで、二項定理の展開式を利用すると、次の式が得られる。

$$E_{re,n} \approx m_e c^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{8n^4} - \dots \right). \quad (44)$$

ディラック方程式では式(37)から出発して、複雑な計算によってエネルギー準位(40)を求めたが、本論で導いた式(42)からは、そのエネルギーを簡単に求めることができる。

ただし、式(42b)は量子化された式ではないから、式(44)のエネルギー値は、縮退した状態にある値が、得られるだけである。

## VI. DISCUSSION

ディラック方程式の解(41)と式(43)の解(44)は等しいから、両式はある条件下で等価であると予測できる。

その等価の条件は、式(38)の  $n'$  が 0 のときである。このとき  $n/|k|=1$  となり、両式の値は一致するから、次の式が成立するはずである。

$$\left( 1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}. \quad (45)$$

いまこの式の左辺の  $s$  に(39)を代入すると、式(45)の左辺は次のようになる。

$$\left( 1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right)^{-1} = \frac{k^2 - \alpha^2}{k^2} \quad (46a)$$

$$= 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}. \quad (46b)$$

結局, 式(38)で  $n'=0$  のとき, (38)と(43)のエネルギー値は一致する.  
ところで,  $|k|$  は次のように書ける.

$$|k| = j + \frac{1}{2}. \quad (47)$$

したがって, 式(40)は次のように書ける.

$$E = m_e c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (48)$$

ここで,  $n/(j+1/2) - 3/4$  が最小になるのは,  $n/(j+1/2) = 1$  のときである. そして, この条件を満たすエネルギー準位が, 式(44)のエネルギーと一致する. このエネルギー準位は, それぞれの  $n$  で可能な準位の中で, 最もエネルギーが高いものとなる. これに対応するエネルギー準位は,  $1S_{1/2}(n=1, l=0, j=1/2)$  と  $2P_{3/2}(n=2, l=1, j=3/2)$  と  $3D_{5/2}(n=3, l=2, j=5/2)$  である.

非相対論的な立場から分類したエネルギー準位は, 次の表のようになる.

$n$	$n' (= n -  k )$	$k [= \pm(n - n')]$	$l (= 0, 1, \dots, n-1)$	$j (=  l \pm 1/2 )$	Energy levels
1	0	1	0	1/2	$1S_{1/2}$ ○
2	1	1	0	1/2	$2S_{1/2}$
2	1	-1	1	1/2	$2P_{1/2}$
2	0	2	1	3/2	$2P_{3/2}$ ○
3	2	1	0	1/2	$3S_{1/2}$
3	2	-1	1	1/2	$3P_{1/2}$
3	1	2	1	3/2	$3P_{3/2}$
3	1	-2	2	3/2	$3D_{3/2}$
3	0	3	2	5/2	$3D_{5/2}$ ○

表 I: 式(48)から得られる水素原子のエネルギー準位. ○でマークされたエネルギー準位は, 式(44)から得られるエネルギーと一致する.

以上の議論から, 本論で新たに定義された  $E_{re,n}$  が, ディラック方程式のエネルギー固有値(40)と等しいことが予測できる. したがって, 式(19)の  $E_{re,n}$  を式(48)の  $E$  に置き替え

ることによって、以下の公式が得られる。

$$E^2 + c^2 p^2 = (m_e c^2)^2,$$

$$\text{ただし, } E = m_e c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (49)$$

## VII. 結 論

本論は、自由空間で成立するアインシュタインのエネルギー-運動量の関係式に類似するものとして、次の水素原子内の電子のエネルギー-運動量の関係式を導いた。

$$E_{\text{re},n}^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2, \quad E_0 = m_e c^2. \quad (50)$$

縮退している水素原子のエネルギー(44)は、本論で導いた新しい関係式(19)から、簡単に求めることができた。

それに対して、ディラック方程式(37)からこのエネルギーを求めるには、複雑な計算を必要とした。さらに、アインシュタインの関係式(1)を量子化して得られたクライン-ゴルドン方程式からディラック方程式を推測する際にも、ディラックは非常な努力を強いられた[7]。

以上のことから、本論で新たに導いた関係式は、量子力学を補完する重要な公式と考えられる。式(19)の量子化の問題は、別の論文で扱うことにする。

本論中では触れなかったが、式(6)をエネルギーについて解くと、次の正負二つの値が得られることが知られている。

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}. \quad (51)$$

(ただし、この関係式は電子以外の粒子でも成立するので、ここでは式(6)の  $m_e$  を  $m_0$  に変更した)

同様に式(19)についても、次のような解が得られる。

$$E_{\text{re},n} = \pm \sqrt{-c^2 p_n^2 + m_e^2 c^4}. \quad (52)$$

かつて、オープンハイマーは、水素原子内の電子が光を発生して負のエネルギー状態に遷移し、原子が一瞬のうちに消えてしまうことを示した。本論では詳細な議論は控えるが、本論でその存在を予言した負のエネルギー、 $-\sqrt{-c^2 p_n^2 + m_e^2 c^4}$  は、水素原子内の電子が負のエネルギー状態に遷移したときのエネルギー値であると考えられる。

## APPENDIX A

水素原子内の電子のエネルギーについて復習しよう[8].

原子核は電子に比べて充分重いため、静止していると考え、そして、電荷 $-e$ 、質量 $m_e$ を持つ電子が点とみなした原子核を中心とした半径 $r$ の円軌道上を、速さ $v$ で運動している状況を考える。

この状況を記述する運動方程式は、次の式で与えられる。

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}. \quad (\text{A1})$$

これより、次の式が得られる。

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (\text{A2})$$

一方、電子のポテンシャル・エネルギーは、次の式で与えられる。

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (\text{A3})$$

式(A2)の右辺は、ポテンシャル・エネルギーの $-1/2$ 倍だから、式(A2)は次のように表せる。

$$V(r) = -2 \left( \frac{1}{2} m_e v^2 \right). \quad (\text{A4})$$

故に電子の全エネルギーは、次のように表せる。

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 + V(r) \quad (\text{A5a})$$

$$= -\frac{1}{2} m_e v^2 \quad (\text{A5b})$$

$$= -K. \quad (\text{A5c})$$

この値は、電子の運動エネルギーと逆の符号を持っている。また電子の全エネルギーは、ポテンシャル・エネルギーの半分に等しい、すなわち、

$$E = \frac{1}{2} V(r). \quad (\text{A6})$$

式(A4)でポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーが異なる理由は、電子によって

放出された光子のエネルギーにあると考えられる。これより、以下のエネルギー保存則が成立する。

$$[V(r) + K] + \hbar\omega = 0. \quad (\text{A7})$$

## APPENDIX B

Gasiorowiczは静止質量エネルギーを持ち、中心から引きつけられて束縛状態にある、水素原子内の電子のシュレーディンガー方程式の相対論的な類推を議論した[9]。

この方程式は、次の式である。

$$\left( \frac{E}{\hbar c} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c r} \right)^2 \psi = -\nabla^2 \psi + \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^2 \psi, \quad (\text{B1})$$

これは、式(1)にポテンシャル・エネルギーが含まれる以下の式の演算子バージョンである。

$$(E - V)^2 = c^2 p^2 + (m_e c^2)^2. \quad (\text{B2})$$

この方程式(B1)を解くことによって得られた解は、実際の水素原子のエネルギー準位と一致しなかった。電子はスピン1/2の素粒子で、クライン-ゴルドン方程式には従わないというのが、その理由とされる。

しかし、それ以前の問題として、式(B2)の左辺は次のようになる。

$$E - V = (K + V) - V \quad (\text{B3a})$$

$$= K. \quad (\text{B3b})$$

これより、 $K^2 > E_0^2$ 、すなわち、 $(p^2/2m)^2 > (m_e c^2)^2$ となるが、このような不等号は、本来成立し得ない。

ここで、式(B2)のEが式(A5c)のEのように定義されるのではなく、代わりに次のように定義される。

$$E = m_e c^2 - K. \quad (\text{B4})$$

式(B2)にこのEを代入して、式(A4)の関係も考慮すると、以下の式を得る。

$$(m_e c^2 + K)^2 = c^2 p^2 + (m_e c^2)^2. \quad (\text{B5})$$

この方程式は、アインシュタインの関係式と一致する。結局、式(B2)のEは、式(B4)

によって定義されるエネルギーである。式(B2)の  $E$  は、電子の静止質量エネルギーを含み、絶対的な尺度で定義されている。

## 参考文献

- [1] A. Einstein, Technical Journal **5**, 16 (1946).
- [2] L. I. シッフ「量子力学 下」(吉岡書店), p562.
- [3] K. Suto, Phys. Essays **22**, 135 (2009).
- [4] A. P. フレンチ「MIT 物理 特殊相対性理論」(培風館), p19.
- [5] A. P. フレンチ「MIT 物理 特殊相対性理論」(培風館), p18.
- [6] L. I. シッフ「量子力学 下」(吉岡書店), p545.
- [7] P. A. M. ディラック「ディラック 現代物理学講義」(培風館), p20.
- [8] 江沢 洋「現代物理学」(朝倉書店), p271.
- [9] S. Gasiorowicz, Quantum Physics: Wiley International Edition, 144 (2003).