陽子の大きさの理論的予測とボーアの量子条件の修正

須藤晃俊

本論は，ボーアが水素原子に適用した量子条件が，近似式であることを明らかにした．そして，本論で新たに仮定した量子条件を用いた計算の結果，ボーアが導いた軌道半径の他に，陽子の半径と考えられる物理量 $r_e/4$ が得られた．

また，電子は大きさをもたない素粒子と考えられているが，もし電子に大きさがあるとすれば，本論はその有力な候補となる値も提示した．

陽子の大きさに電子の質量が関与していることから，電子の大きさにも陽子の質量が関与していると仮定すると，電子の半径を予測することが可能になる．

陽子や電子が，実験によってその大きさを測定する以前から，半径が確定した状態で存在しているとすれば，量子力学は見直しを迫られることになる．

キーワード：水素原子；量子条件；ボーア半径；古典電子半径；アインシュタインのエネルギー–運動量の関係式；相対論的エネルギー；静止質量エネルギー；陽子の半径；電子の半径；超光速；タキオン；暗黒物質(ダークマター)；コペンハーゲン解釈；二重スリットの実験

I.　序　論

古典量子論では，水素原子は正電荷をもつ陽子の周囲を，負電荷をもつ電子が，クーロンの引力によって回っているというモデルを用いて説明される．

原子核は重いから静止しているとし，それを中心とする半径 r の円軌道上を，電子(電荷 $-e$、質量 m_e)が，速さ v で回っていると考える．

運動している電子がもっている力学的な全エネルギーは，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和から求めることができる．

電子が陽子から受ける引力は中心力であり，運動方程式は次の式で表せる．

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}. \qquad (1)$$

これより，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{2}$$

また，電子のポテンシャル・エネルギー$V(r)$は，電子が陽子から無限遠の位置に静止しているときをゼロとするから，原子内ではそれよりも低くなり，次のようになる．

$$V(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{3}$$

式(2)の右辺は，(3)の -1/2 倍であるから，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2=-\frac{1}{2}V(r). \tag{4}$$

結局，電子が持つ力学的な全エネルギーEは，

$$E=\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2+V(r)=-\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2. \tag{5}$$

また，このエネルギーを位置エネルギーを用いて表すと，

$$E=\frac{1}{2}V(r)=-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6}$$

ところで，ボーアは原子内の電子のエネルギーが離散的な値を取ることを説明するために，次のように考えた．

波長λの電子の波が，円周$2\pi r$の中に整数個あると仮定すると，

$$2\pi r=n\lambda. \tag{7}$$

この式のλに，ド・ブロイの関係式$\lambda=h/p$を代入すると，

$$2\pi rp=2\pi n\hbar. \tag{8}$$

これが，ボーアが仮定した量子条件である．

次に，式(2)の両辺にr^2を掛けて，(8)を用いれば，

$$r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2n^2}{m_{\mathrm{e}}e^2}=a_{\mathrm{B}}n^2,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{9}$$

ここでは，左辺のrにも添え字nを付けた．a_{B}はボーア半径，nは主量子数である．

次に，式(9)を(6)のr_nに代入し，ここでもEに添え字nを付けると，

$$E_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{m_{\mathrm{e}}e^4}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}. \tag{10}$$

以上が古典量子論から導いた，水素原子内の電子の軌道半径と定常状態のエネルギー

である．ただし，より厳密な計算が必要な場合には，m_e は次の換算質量に置き換えなければならない．

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}. \tag{11}$$

ところで，古典量子論で(8)が量子条件として採用されたのは，これを用いると，水素原子の定常状態のエネルギーを正しく導けるからであり，それ以上の根拠はなかった．

したがって，ボーアは(8)の両辺が等しいことを証明した訳ではなく，(8)の両辺が等しいと仮定したに過ぎない．

自由空間に静止していた電子が，原子内に取り込まれると，電子は運動エネルギーを獲得するが，同時にそれと同量のエネルギーを持つ光子を放出する．これらのエネルギーは，電子の持つ位置エネルギーが減少することによって賄われる．

著者は別の論文で，電子の持つ位置エネルギーは，電子の静止質量エネルギーの減少分に対応することを示した[1]．

いまこの減少分を $-\Delta m_e c^2$ と表現すると，

$$-\Delta m_e c^2 = V(r_n) = 2E_n = -\left(K_n + \hbar\omega\right), \qquad K_n = \hbar\omega. \tag{12}$$

(ここで，放出される光子が複数個の場合には，$\hbar\omega$ は個々の光子のエネルギーの総和を現わすものとする．また，運動エネルギーは K と改めた)

これより，水素原子内の電子の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーには，次の不等式が成立することが明らかになった．

$$K \le \frac{1}{2} m_e c^2. \tag{13}$$

$$-m_e c^2 \le V(r). \tag{14}$$

ところで，量子力学では，水素原子の電子の運動は古典的運動とは考えられず，実際には定常波 ψ で表される．さらには，$|\psi^*\psi|$が陽子の周囲で対称であり，かつ，時間依存性がない．このとき，荷電分布は完全に静的(古典的運動がない)になる．

しかし，本論の議論は，ボーアが古典量子論を発表した後に，続けて行うべきであった．したがって，本論で，完成した量子力学を用いず，古典量子論的な描像を用いて議論することは，許されると考える．

II. 水素原子内の電子のエネルギーと運動量

著者は別の論文で，水素原子内の電子のエネルギーと運動量の間には，次の関係式が成立することを示した[2].

$$E_{\mathrm{re},n}^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2, \qquad E_0 = m_{\mathrm{e}} c^2, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

ここで, $E_{\mathrm{re},n}$ は電子の相対論的エネルギーで，次のように定義された.

$$E_{\mathrm{re},n} = m_{\mathrm{e}} c^2 + K_n + V(r_n) \tag{16a}$$

$$= m_{\mathrm{e}} c^2 - \frac{1}{2} \Delta m_{\mathrm{e}} c^2 \tag{16b}$$

$$= m_{\mathrm{e}} c^2 + E_n . \tag{16c}$$

電子が陽子から無限遠の位置で静止しているとき，その電子が持っているポテンシャル・エネルギーはゼロである. しかし，その場合でも電子は静止質量エネルギー $m_{\mathrm{e}} c^2$ を持っているから，電子の正確なエネルギーは(10)ではなく, (16c)で記述される. これより, 式(10)の E_n は次のように定義できる.

$$E_n = -\left(m_{\mathrm{e}} c^2 - E_{\mathrm{re},n} \right). \tag{17}$$

いま, (16c)を(15)に代入すると,

$$(m_{\mathrm{e}} c^2 + E_n)^2 + c^2 p_n^2 = \left(m_{\mathrm{e}} c^2 \right)^2 . \tag{18}$$

次に, (10)の値を(18)の E_n に代入すると, (18)の左辺は次のようになる.

$$\left[m_{\mathrm{e}} c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{m_{\mathrm{e}} e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \right]^2 + c^2 p_n^2 = \left[m_{\mathrm{e}} c^2 - \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right)^2 \frac{m_{\mathrm{e}} c^2}{2n^2} \right]^2 + c^2 p_n^2 \tag{19a}$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)^2 \left(m_{\mathrm{e}} c^2 \right)^2 + c^2 p_n^2 . \tag{19b}$$

これより, (18)は次のようになる.

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)^2 \left(m_{\mathrm{e}} c^2 \right)^2 + c^2 p_n^2 = \left(m_{\mathrm{e}} c^2 \right)^2 . \tag{20}$$

ここで, α は次のように定義される微細構造定数である.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} . \tag{21}$$

また, (20)から，次の物理量を求めることができる.

$$E_{\mathrm{re},n}=\left(1-\frac{\alpha^2}{2n^2}\right)m_{\mathrm{e}}c^2. \tag{22}$$

$$E_n=-\frac{\alpha^2 m_{\mathrm{e}}c^2}{2n^2}. \tag{23}$$

$$p_n=m_{\mathrm{e}}c\sqrt{\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^4}{4n^4}} \tag{24a}$$

$$=\frac{\alpha m_{\mathrm{e}}c}{n^2}\sqrt{n^2-\alpha^2/4}. \tag{24b}$$

ところで，$\alpha^4=2.836\times10^{-9}$ だから，ここで $\alpha^4/4n^4\approx0$ と近似すれば，式(24a)は，次のように書ける．

$$p_n\approx\frac{\alpha m_{\mathrm{e}}c}{n}. \tag{25}$$

また，この p_n は別の方法でも求めることができる．

非相対論的な速度で運動していて，主量子数 n のエネルギー状態にある電子の運動エネルギーK_n と運動量 p_n の間には，次の関係がある．

$$K_n\approx\frac{p_n^2}{2m_{\mathrm{e}}}. \tag{26}$$

式(10)の右辺に，式(26)の K_n を代入すると，次の式を得る．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{m_{\mathrm{e}}e^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}\approx\frac{p_n^2}{2m_{\mathrm{e}}}. \tag{27}$$

これより，次の式が得られる．

$$p_n\approx\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{m_{\mathrm{e}}e^2}{n\hbar}=\frac{\alpha m_{\mathrm{e}}c}{n}. \tag{28}$$

次に，教科書の論理を参考にして，水素原子内の電子のエネルギーについて考える[3]．

いま，(15)で電子の速度をゼロと置くと，次のアインシュタインの公式が導ける．

$$m_{\mathrm{e}}=\frac{E_{\mathrm{re}}}{c^2}. \tag{29}$$

また，古典力学では，

$$m_{\mathrm{e}}=\frac{p}{v}. \tag{30}$$

この二式から,

$$cp = \frac{E_{\mathrm{re}} v}{c}. \tag{31}$$

原子内の電子の物理量は，離散的な値を持つから，(31)の両辺の物理量に添え字 n を付けると,

$$cp_n = \frac{E_{\mathrm{re},n} v_n}{c}. \tag{32}$$

ここで，(32)の cp_n を(15)に代入して整理し，+ の値を採用すると,

$$E_{\mathrm{re},n} = \frac{m_{\mathrm{e}} c^2}{\sqrt{1 + v_n^2 / c^2}}. \tag{33}$$

また，(29)の関係を考慮すると,

$$m_{\mathrm{re},n} = \frac{m_{\mathrm{e}}}{\sqrt{1 + v_n^2 / c^2}}. \tag{34}$$

ここで，(22)と(33)を考慮して，次の $\gamma_{\mathrm{a},n}$ を定義する.

$$\gamma_{\mathrm{a},n} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_n^2 / c^2}} = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}. \tag{35}$$

(γ はローレンツ変換における比例定数を借用した．また，この比例定数は，原子内で成立するから，“Atom”の“a”を添え字として使用した)

すると，(33)と(34)は次のように表せる.

$$E_{\mathrm{re},n} = \gamma_{\mathrm{a},n} E_0 = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right) m_{\mathrm{e}} c^2. \tag{36}$$

$$m_{\mathrm{re},n} = \gamma_{\mathrm{a},n} m_{\mathrm{e}} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right) m_{\mathrm{e}}. \tag{37}$$

原子内の電子は，速さが増すと電子のエネルギーと質量は減少する．また，原子内では，光速が上限速度として機能しないことも予測できる.

ところで，(35)は次のように書ける.

$$1 + \frac{v_n^2}{c^2} = \left(\frac{2n^2}{2n^2 - \alpha^2}\right)^2. \tag{38}$$

これより，v_n は次のようになる.

$$v_n = \frac{2\alpha c\sqrt{n^2 - \alpha^2/4}}{2n^2 - \alpha^2}. \tag{39}$$

古典量子論では，運動する電子の速さについて論じることができた．しかし，量子力学では，運動する電子の描像を描くことはできない．また，物理量は演算子で表すから，方程式の中に v が現れることはない．しかし，幸いにも本論では，原子内における電子の速さを，物理定数である c や α と，主量子数 n で置き換えることができた．

ところで，相対論的エネルギーの公式(33)は，非常に小さい v_n/c に対しては，次のようになる．

$$E_{\mathrm{re},n} \approx m_{\mathrm{e}}c^2\left(1+\frac{v_n^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_{\mathrm{e}}c^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v_n^4}{c^4}+\cdots\right). \tag{40}$$

v_n/c が充分小さい場合には，この級数は始めの 2 項で高い精度で近似できる．すなわち，

$$E_{\mathrm{re},n} \approx m_{\mathrm{e}}c^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{c^2}\right) = m_{\mathrm{e}}c^2 - \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v_n^2. \tag{41}$$

次に，r_n について考察する．(6)の E と r に添え字 n を付けると，

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}. \tag{42}$$

この式と(23)を等号で結ぶと，

$$-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{\alpha^2 m_{\mathrm{e}}c^2}{2n^2}. \tag{43}$$

これより，

$$r_n = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2}\frac{2n^2}{\alpha^2} \tag{44a}$$

$$= \frac{r_{\mathrm{e}}}{\alpha^2}\cdot n^2 \tag{44b}$$

$$= a_{\mathrm{B}}n^2. \tag{9}$$

ここで，r_{e} は古典電子半径である．

III. 新量子条件の提示と陽子の大きさの理論的予測

ボーアは量子条件(8)を推測する際に，(7)に現れる波長と，ド・ブロイの公式に現れる波の波長を同一視した．しかし，量子力学によれば，原子内の波に実在性はない．ボー

アの量子条件は，論理的にはその正当性を証明できない仮説として登場したのは，周知のことである．

本論では，(44b)で水素原子内の電子の軌道半径が，また，(24b)では電子の運動量の公式が得られたので，これらの値を(8)の左辺に代入して，実際にこの量子条件が成立するか否か確認しよう．

先ず，(8)の左辺は，

$$2\pi r_n \cdot p_n = 2\pi \cdot \frac{r_{\mathrm{e}} n^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha m_{\mathrm{e}} c}{n^2} \sqrt{n^2 - \alpha^2/4} \tag{45a}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{e}} c}{\alpha} \sqrt{n^2 - \alpha^2/4}. \tag{45b}$$

ここで，

$$\frac{r_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{e}} c}{\alpha} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c^2} \cdot m_{\mathrm{e}} c \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right)^{-1} = \hbar. \tag{46}$$

故に，

$$2\pi r_n \cdot p_n = 2\pi\hbar\sqrt{n^2 - \alpha^2/4} \tag{47}$$

式(24b)から明らかなように，$\alpha^2/4 \approx 0$ とみなすことは，p_n の値として，近似値 $\alpha m_{\mathrm{e}} c/n$ を用いることを意味している．すなわち，

$$2\pi r_n \cdot p_n \approx 2\pi \cdot \frac{r_{\mathrm{e}} n^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha m_{\mathrm{e}} c}{n} \tag{48a}$$

$$= 2\pi n\hbar. \tag{48b}$$

以上の考察によって，量子条件(8)は，近似式であることが証明できた．

ところで，より一般化された量子条件は(8)ではなく，次の式である．

$$\oint p ds = 2\pi\hbar n. \tag{49}$$

式(47)は，(49)に代わる量子条件として提示されたものではない．

次に，新量子条件(47)が，物理学の発展に寄与できるか否かを議論しよう．

先ず，式(18)から次の p_n が導ける．

$$p_n = \frac{1}{c}\sqrt{-2m_{\mathrm{e}} c^2 E_n - E_n^2}. \tag{50}$$

また，式(47)は次のように表現できる．

$$p_n = \frac{\hbar\sqrt{n^2 - \alpha^2/4}}{r_n}. \tag{51}$$

式(51)の p_n を式(50)に代入すると，次の式が得られる．

$$\frac{1}{c}\sqrt{-2m_\mathrm{e}c^2E_n - E_n^2}\cdot r_n = \hbar\sqrt{n^2 - \alpha^2/4}. \tag{52}$$

ここで，式(42)の右辺を式(52)の E_n に代入すると，次のようになる．

$$\left[-2m_\mathrm{e}c^2\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}\right)^2\right]r_n^2 = \hbar^2c^2\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right). \tag{53}$$

この方程式を r_n について解くと，次の値が得られる．

$$r_n = \frac{1}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e}c^2} + \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2n^2}{m_\mathrm{e}e^2} - \frac{\pi\varepsilon_0\hbar^2\alpha^2}{m_\mathrm{e}e^2} \tag{54a}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e}c^2} + \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2n^2}{m_\mathrm{e}e^2} - \frac{\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e}e^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)^2 \tag{54b}$$

$$= \frac{r_\mathrm{e}}{4} + a_\mathrm{B}n^2 - \frac{r_\mathrm{e}}{4} \tag{54c}$$

$$= a_\mathrm{B}n^2. \tag{54d}$$

また，式(54d)は次のように表現できる．

$$r_n = \frac{r_\mathrm{e}}{4} + \frac{r_\mathrm{e}}{\alpha^2}\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{55}$$

式(9)と(54d)は，数学的には同じ公式であるが，意味するところは異なっている．ボーアの古典量子論では，陽子を点として扱うから，大きさを持つ陽子の表面から軌道までの距離を論ずることはできない．したがって，(9)は電子の軌道半径を示しているに過ぎない．

ところが，(54d)を(55)のように表現すると，(9)との相違が明確になる．式(55)では，第 1 項が陽子の半径，$r_\mathrm{e}n^2/\alpha^2$ は，陽子の表面から電子の軌道までの距離と解釈できる．

この解釈によれば，陽子の半径 r_p は，0.705fm (ただし，1 fm= 10^{-15}m)になる．

CODATA が推奨する値は，0.8768(69) fm であるが，最近では，陽子はもう少し小さいとの実験結果も報告されている．また物理学の教科書では，最近まで(1.2~1.5) fm の値を採用していたから，(55)の第 1 項を陽子の半径とみなすことは可能と考える．

いま，(54c)の最初の 2 項について考えよう．陽子の半径と軌道半径は，ともに原子核

の中心から計測された距離である．したがって，これは物理空間でのことではなく，座標空間でのことであるが，陽子の中心から$r_{\mathrm{e}}/4$までは，この二つの半径が重なっている．(54c)の第 3 項は，この重複分を差し引く操作を意味している．いま，この重複分を陽子の半径から差し引くと，(54d)が得られ，この重複分を軌道半径から差し引くと，(55)が得られる．

ここで，従来の量子条件(8)から得たp_nの値$\alpha m_{\mathrm{e}} c/n$を(50)に代入すると，次の半径が得られる．

$$r_n = \frac{r_{\mathrm{e}}}{4} + a_{\mathrm{B}} n^2. \tag{56}$$

この場合の水素原子の軌道半径は，陽子の半径が加算された分だけ(9)よりも大きくなる．しかし，(56)の値を(42)のr_nに代入しても，エネルギーの公式(10)は得られない．

ところで，陽子のサイズを決定する物理量は，電荷eと電子の静止質量エネルギー，$m_{\mathrm{e}}c^2$である．

ド・ブロイが物質波の存在を予測したときに使った論法を参考にすると，大きさのない粒子と考えられている電子の大きさについて，議論することが可能になる．

本論の考察で，陽子の大きさに電子の質量m_{e}が関与していることに気づいた．

ここで，電子の大きさに陽子の質量m_{p}が関与していると仮定すると，電子の半径r_{el}は次のようになる.

$$r_{\mathrm{el}} = \frac{1}{4}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{p}} c^2} = \frac{m_{\mathrm{e}} r_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}} = 3.84\times 10^{-19}\ \mathrm{m}. \tag{57}$$

陽子や電子が，実験によってその大きさを測定する以前から，半径が確定した状態で存在しているとすれば，量子力学は見直しを迫られることになる．その理由については，結論の(3)で説明する．

IV. DISCUSSION

本論の中心となる議論は，一応前章で終了したが，本章では著者が日頃から不可解に思っている問題を提起したい．著者は論文[5]において，次の量子条件を仮定した．

$$p_n \times 2\pi r_n = 2\pi\hbar\sqrt{\alpha^2 + n^2}, \qquad n = 0, 1, 2\cdots. \tag{58}$$

ボーアが仮定した量子条件は，論理的に導いた式ではないから，多少の変更は許されると考えた．著者が量子条件の修正を試みたのは，次の理由による．

式(14)から，水素原子のエネルギーの下限値として，次の値を決定できる．

$$E = \frac{V(r)}{2} = -\frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{2} = -0.255449455\,\mathrm{MeV}. \tag{59}$$

一方，前期量子論によれば，水素原子の基底状態のエネルギー値は次のようになる．

$$E_1 = -\frac{\alpha^2 m_{\mathrm{e}}c^2}{2} = -13.60\,\mathrm{eV}. \tag{60}$$

ここで，エネルギーが，$-m_{\mathrm{e}}c^2/2$ のときを，水素原子の「新基底状態のエネルギー」を E_{ng} と定義すると，これらの二つのエネルギー値の関係は，以下のようになる．

$$\frac{E_1}{E_{\mathrm{ng}}} = -\frac{\alpha^2 m_{\mathrm{e}}c^2}{2} \times \left(-\frac{2}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right) = \alpha^2 = 5.325\times10^{-5}. \tag{61}$$

実際の基底状態のエネルギーE_1 と E_{ng} の間には，かなりの開きがある．また，軌道半径の観点から見ても，電子は理論的には陽子の中心から r_{e} の距離まで陽子に近づくことが可能なのに[1]，古典量子論が予測する最小半径は a_{B} である．この二つの半径の比を取ると，

$$\frac{r_{\mathrm{e}}}{a_{\mathrm{B}}} = \frac{r_{\mathrm{e}}\times\alpha^2}{r_{\mathrm{e}}} = \alpha^2. \tag{62}$$

式(61)と(62)からは，次の関係が得られる．

$$a_{\mathrm{B}}E_1 = r_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{ng}} = r_nE_n = -\frac{r_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{e}}c^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{63}$$

式(9)と(10)からも明らかなように，通常 r_n と E_n は，a_{B} と E_1 に依存すると考えられている．しかし，本論は(55)や(63)を考慮して，r_n と E_n は，r_{e} と $m_{\mathrm{e}}c^2/2$ に関連していると推測する．

ここで，水素原子に E_1 より低いエネルギー準位が存在するか否か，調和振動子を例にとって，その可能性を検討してみよう．

調和振動子のエネルギー準位をシュレーディンガー方程式を用いて解くと，固有値は次のようになる．

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0,1,2,\cdots. \tag{64}$$

ここで，この固有値と水素原子のエネルギー値(23)を比較して，水素原子の最低エネルギーは，次の値になると仮定してみよう．

$$-\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2} = -\frac{m_e c^2}{2}. \tag{65}$$

これを解くと,

$$n = \alpha. \tag{66}$$

これより，主量子数は，$n = \alpha, 1, 2, \cdots$ となる．本論は n=α のエネルギー準位が存在すると主張している訳ではないが，現時点で n=α の存在を禁止する理論は存在しない．

もし，この状態が存在するとすれば，電子の軌道半径やエネルギーは，どんな値になるであろうか？

先ず，式(44b)の n に α を代入すると，

$$r = r_e. \tag{67}$$

次に，式(23), (39), (24a)，および，(41)の n にそれぞれ α を代入すると，

$$E_{ng} = -\frac{m_e c^2}{2}. \tag{68}$$

$$m = \frac{m_e}{2}. \tag{69}$$

$$p = \frac{\sqrt{3} m_e c}{2}. \tag{70}$$

$$v = \sqrt{3} c. \tag{71}$$

n= α の状態にある電子の軌道半径とエネルギーは，著者が指摘した理論的に許される最小半径と最低エネルギーに一致する．これより，(55)の n は次のようになる．

$$r_n = \frac{r_e}{4} + \frac{r_e}{\alpha^2}\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right), \qquad n = \alpha, 1, 2, \cdots. \tag{72 }$$

また，この式は次のように表現できる．

$$r_n = r_e n^2 = \alpha^2 a_B n^2, \qquad n = 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \cdots. \tag{73}$$

この二つの公式は，古典量子論が予測する軌道半径(9)の内側に，さらに半径 r_e の軌道が存在することを示している．

また，式(42)に(73)の r_n を代入すると，次のエネルギーの公式が導ける．

$$E_n = -\frac{m_e c^2}{2}\frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \cdots. \tag{74}$$

ここでも，古典量子論で導いた定常状態のエネルギーの他に，$-m_ec^2/2$ のエネルギーを持つ状態が新たに付加されている．

この最低のエネルギー準位に，電子が遷移すれば，放出される光子のエネルギーは，いか程であろうか？ 電子が $n=1/\alpha$ から $n=1$ へ遷移するときに，放出される光子のエネルギーを $\hbar\omega_{1,1/\alpha}$ とすれば，

$$\hbar\omega_{1,1/\alpha} = E_{1/\alpha} - E_1 = -\frac{m_ec^2}{2}\left(\alpha^2 - 1\right) = 0.255435852\text{MeV}. \tag{75}$$

また，この光子の波長を $\lambda_{1,1/\alpha}$ とすれば，

$$\lambda_{1,1/\alpha} = \frac{2\hbar c}{\hbar\omega_{1,1/\alpha}} = 4.852875126\times10^{-12}\ \text{m}. \tag{76}$$

放出される光子のエネルギーは，$m_ec^2/2$ の場合もあるから，この光子の波長を $\lambda_{1,\infty}$ とすると，

$$\lambda_{1,\infty} = \frac{2hc}{m_ec^2} = 2\lambda_C = 4.852620435\times10^{-12}\ \text{m}. \tag{77}$$

これより，電子が E_{ng} に遷移することによって放出される光子のエネルギーは，$0.255435852 \sim 0.255449455\ \text{MeV}$，その波長は，$4.852875126 \sim 4.852620435\times10^{-12}\ \text{m}$ となる．

さて，パウリによれば，主量子数が n のエネルギー準位に入れる電子の総数は $2n^2$ 個だから，$n=\alpha$ のエネルギー準位には，電子は存在できない．しかし，この場合は，パウリの原理の適用外ということも考えられる．

結局，水素原子に基底状態よりも，さらに低いエネルギー準位 E_{ng} が存在するか否かに決着を付けるのは，理論ではなく，実験である．

ところで，式(33)と(34)を考慮すると，原子内では電子の速度が増すと，エネルギーや質量は減少するので，光速が限界速度として機能しないことが予測できる．実際(71)では，電子は超光速で運動している．したがって，原子内では特殊相対論の「速度の加算則」とは異なる公式を適用しなければならない．

超光速で運動する粒子はタキオンと命名されているが，タキオンとは未知の粒子ではなく，既存の粒子が特定の条件下でタキオンになると予測できる．

V. 結　論

(1) 量子条件は，ボーアの原子理論において，水素原子内の電子に対して仮定された定

常状態を古典力学の運動方程式の中から選び出すための条件であり，従来は(8)が正しいとされてきた。しかし，本論は(8)は近似式に過ぎず，正確には次の関係が成立することを示した。

$$2\pi r_n \cdot p_n = 2\pi\hbar\sqrt{n^2 - \alpha^2/4}. \tag{78}$$

量子条件(8)が近似式となったのは，古典量子論では，(24)のp_nではなく，近似値である(25)のp_nを用いたからである.

(2) 本論で新たに提示した量子条件を(18)に適用して，(9)に代わる水素原子の軌道半径を求めることができた.

$$r_n = \frac{r_e}{4} + \frac{r_e}{\alpha^2}\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right), \qquad n = 1,2,3,\cdots. \tag{79}$$

式(55)に新たに付加された項$r_e/4$は，原子核，すなわち，陽子の半径r_pに関連していると考えられる．その陽子の半径r_pは，以下のようになる.

$$r_p = \frac{r_c}{4} = 0.705\times10^{-15}\ \mathrm{m} = 0.705\,\mathrm{fm}. \tag{80}$$

さらに本論は，従来のr_1とE_1よりもさらに小さな軌道半径とエネルギー準位の存在を許す，次の公式を仮説として提示した(ここでは，主量子数も古典量子論のものとは，異なっていることに注意が必要である).

$$r_n = r_e n^2 = \alpha^2 a_B n^2, \qquad n = 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \cdots. \tag{81}$$

$$E_n = -\frac{m_e c^2}{2}\frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \cdots. \tag{82}$$

もし，$-m_e c^2/2$ のエネルギーを持つ水素原子が存在すれば，それは通常の水素原子よりもはるかに高密度で存在していると考えられるが，これは暗黒物質(ダークマター)の有力な候補になると考えられる.

(3) 量子力学の伝統的な解釈とされているコペンハーゲン解釈によれば，ミクロの粒子，すなわち，量子はその位置が観測によって確定するまでは，波のように振る舞う.そして，その位置が観測された瞬間，粒子としての位置が確定する.

しかしながら，本論では陽子と電子の大きさを，実験ではなく，計算によって決定し

た．このことは，量子の一種である陽子と電子は，たとえその位置が観測によって確定しなくても，粒子としてある場所に局在化していることを意味している．

ところで，有名な電子による二つのスリットを使った干渉実験において，伝統的な解釈は次のようである．

『分割不可能な電子が，あたかも二つのスリットを同時に通過してきたように，振る舞う』

しかしながら，本論では次のように結論する．

『一個の電子は，粒子としてどちらか一つのスリットを通過するが，検出器によって検出される電子の位置の確率分布は，最終的に干渉模様を描く』

もし，本論の予測が正しければ，コペンハーゲン解釈は修正を迫られることになる．

参考文献

[1] K. Suto, Phys. Essays **22**, 135 (2009).

[2] K. Suto, Phys. Essays **24**, 301 (2011).

[3] A. P. フレンチ,「MIT 物理　特殊相対性理論」(培風館), p. 18.

[4] R. Pohl, Nature **466**, 213 (2010).

[5] K. Suto, Phys. Essays **22**, 359 (2009).