特殊相対論が予測する空間収縮と時間の遅れの割合を決める真の要因

須藤晃俊

特殊相対論によれば、運動している物体の速度が増加すると、その物体の進行方向の長さは収縮し、その座標系で経過する時間は遅れる。これはローレンツ変換の公式から導ける結論である。

しかし、ポテンシャル・エネルギーを考慮しなければならない原子内では、ローレンツ変換の公式は適用できない。著者が新たに導いた変換式が適用できる状況では、運動している物体の速度が増加すると、その物体の進行方向の長さは伸張し、その座標系で経過する時間は進む。また同時に、その物体の相対論的エネルギーと質量は減少する。特殊相対論では、運動する物体の進行方向の長さや、物体の座標系で経過する時間のテンポを決定するのは、静止系と運動系の間の相対速度である。しかし、本論は、物体の長さや経過する時間を決定する要因は、相対速度であるとの主張を退ける。真の要因は、運動する物体の速度の増減によって変化する物体の静止質量エネルギーと物体の相対論的エネルギーの比であると結論する.

I. 序　論

特殊相対論(STR)を代表する公式には、次のローレンツの変換式(1)とアインシュタインのエネルギー−運動量の関係式(2)がある。

$$
\begin{aligned}
&x=\gamma(x'+vt'), && x'=\gamma(x-vt),\\
&y=y', && y'=y,\\
&z=z', && z'=z,\\
&t=\gamma(t'+vx'/c^2), && t'=\gamma(t-vx/c^2).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで、 $\gamma=\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$, vは慣性系Sから見た慣性系S'の速さを表わす。

$$E^2=c^2p^2+E_0^2. \tag{2}$$

ここで、E_0は物体の静止エネルギーを、またEは物体の相対論的エネルギーを表わす。

特殊相対論によれば、運動している物体の速度が増加すると、その物体の進行方向の長さは収縮し、その座標系で経過する時間は遅れる。また同時に、その物体のエネルギ

ーと質量も増加する。

特殊相対論の公式はマクロの自由空間で成立するが、著者は別の論文で、水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を表す次の公式を導いた[1]。

$$E_{\mathrm{re},n}^2 + c^2 p_n^2 = \left(m_{\mathrm{e}} c^2\right)^2, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

ここで $m_{\mathrm{e}}c^2$ は電子の静止エネルギーを、また $E_{\mathrm{re},n}$ は主量子数が n のときの電子の相対論的エネルギーを表わしている。そして $E_{\mathrm{re},n}$ は次のように定義された。

$$E_{\mathrm{re},n} = m_{\mathrm{e}} c^2 + E_n, \qquad E_n < 0. \tag{4}$$

ここでE_nは量子力学が与える水素原子のエネルギーである。

$E_{\mathrm{re},n}$は特に注目されることなく、物理学に導入されている。シッフの教科書では、$E_{\mathrm{re},n}$は次の公式の記述されている[2]。

$$E = m_{\mathrm{e}} c^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4}\left(\frac{n}{|k|} - \frac{3}{4}\right)\right]. \tag{5}$$

式(3)を量子化すれば、ディラック方程式と対等の方程式を簡単に求めることができるし[3]、式(3)からは陽子の大きさを予測することもできる[4]。これらの論文の成果によって、本論は式(3)に対する疑念は払拭されたと考える。

いま式(2)で粒子の速度をゼロと置くと、

$$m = \frac{E}{c^2}. \tag{6}$$

また古典力学では、

$$m = \frac{p}{v}. \tag{7}$$

この2式から、

$$pc = \frac{Ev}{c}. \tag{8}$$

次にこのpcを式(2)に代入して整理すると、

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{9}$$

ここで式(6)の関係を考慮すると、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{10}$$

特殊相対論では、物体の相対論的エネルギーEは物体の静止エネルギーE_0より大きくなる。同様に物体の相対論的質量mは、物体の静止質量m_0より大きくなる。

もし式(2)から式(9)と式(10)を導いた論理を今度は式(3)に適用すると、次の二式が導ける。

$$E_{\mathrm{re},n} = \frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}. \tag{11}$$

$$m_{\mathrm{re},n} = \frac{m_{\mathrm{e}}}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}. \tag{12}$$

式(12)によれば、水素原子内の電子の速度が増すと質量は減少し、加速が容易になる。このことから、原子内では電子の速度が光速を超えることが 予測できる。

いま自由空間でお互いに等速運動をしている二つの慣性系SとS'を考える（以下では、慣性系SをSと、また慣性系S' をS'と省略する）。

Sのx軸上の2点x_1とx_2の間の距離をSの観測者がL_0と計測したとしよう。次にこの2点間の距離をSに対して速さvで運動しているS'の観測者がLと計測したとしよう。このときS'の観測者はL_0とLの間に次の関係を見出す。

$$L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{13}$$

運動している物体は、進行方向の長さが収縮する。しかし、特殊相対論によれば、Sと S'は物理的に同等である。したがって、今度は逆に S'の観測者が S'の x'軸上の 2 点間の距離を L_0 と計測すると、S の観測者はこの距離を L と計測する。

また時間については、Sで時間τ_0が経過するとき、S'で時間τが経過すれば、S'の観測者はτ_0とτの間に、次の関係を見出す。

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \tau_0 < \tau. \tag{14}$$

運動している時計で経過する時間は遅れる。またSの観測者がS'の時間の経過を計測すると、同様の遅れを見出す。

式(2)が成立するマクロの自由空間では式(1)が適用できるのに、式(3)が成立する原子内の空間では、式(1)に対応する変換式が存在しない。対称性を考慮すれば、原子内で

適用できる変換式が存在している可能性がある。

その変換式を導くことは数学的にはそれほど難しくないが、物理的には大きな問題に直面する。

量子力学では水素原子の電子の運動は古典的運動とは考えられず、実際には定常波ψで表される。さらには、$|\psi^*\psi|$が陽子の周囲で対称であり、かつ時間依存性がない。このとき、荷電分布は完全に静的(古典的運動がない)になる。

原子内の電子の運動に対して何らかの描像を描くことは、量子力学を無視した無謀な行為と考えられる。

しかし、本論で導く変換式は、本来なら 20 世紀前半に発見されていても何ら不思議ではなかった。したがって、著者は古典量子論の自然観に基づいて変換式を導くことは許されると考える。

II. ローレンツ変換とは異なる変換式の導出

本章ではローレンツの変換式を導いた論理を参考にして、未知の変換式を導いてみよう[5]。

いま原子核の系を S とし、原子内を等速で運動する電子の系を S'とする。

電子が原子内で等速運動するのは、電子が円運動をしているときである。しかし、この場合には、S と S'を同等な座標系と見なすことはできない。

それに対して、主量子数が最大の値をとり、電子が大きく扁平した楕円軌道上を運動する場合、微少な時間に限れば、電子が近似的に等速運動をしているとみなすことは可能と考える。

しかし、読者が著者の設定したモデルを容認できなければ、読者は原子内の空間を等速度で横切る粒子の座標系 S'を想定しても良い。

本論では未知の変換式の適用限界に関する議論は後回しにして、先ずは変換式を導くことを優先させる。そしてその変換式から物理的な発見があるか否かを確認する。

量子力学では、複素数が本質的な役割を果たしているから、新しい変換式を導く際にも、複素数が重要な役割を果たすと仮定する。また新しい変換式は線形であると仮定する。

先ず「相対性原理」から出てくる対称性を考慮して、次の関係式が成立すると仮定する。

$$x = iax' + ibt', \qquad x' = iax - ibt. \tag{15}$$

S' から見た S の原点の運動は、初めの式で $x=0$ とすれば求められる。逆に S から見た S'の原点の運動は、二番目の式で $x'=0$ とすれば求められる。それらの速度 v は方向が逆向きであるが、大きさは等しい。

これより次の条件が成立する。

$$\frac{b}{a} = v. \tag{16}$$

次に x軸上を正の方向に進む光の信号をSとS'から見た場合を考える。二つの慣性系のx軸の原点が一致したとき、原点Oから放出された光の信号の伝播は、SとS' から見て、それぞれ次の式で記述できると仮定する。

$$x = ict, \tag{17a}$$

$$x' = ict'. \tag{17b}$$

両式の x と x'を式(15)に代入すると、次の式が得られる。

$$ct = (iac + b)t' \quad , \qquad ct' = (iac - b)t. \tag{18}$$

この二式でtとt' を消去して、式(16)の関係を用いると、次のようになる。

$$c^2 = -a^2\left(c^2 + v^2\right). \tag{19}$$

これより、

$$a = \frac{i}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}. \tag{20}$$

ここで次のようなγ_{a} を定義する。

$$\gamma_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}. \tag{21}$$

すると式 (20)は次のようになる。

$$a = i\gamma_{\mathrm{a}}. \tag{22}$$

この式の右辺を式(15)のaに代入すると、

$$x = \mp \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} = \mp \gamma_{\mathrm{a}}\left(x' + vt'\right), \tag{23a}$$

$$x' = \mp \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} = \mp \gamma_{\mathrm{a}}\left(x - vt\right). \tag{23b}$$

式(1)の係数は$\gamma(v)>1$であるが、式(23)の係数は$\gamma_{\mathrm{a}}(v)<1$である。

ところで、式(23)と式(24)が適用できる電子のエネルギー領域は、$m_e c^2/2 < E_{re} < m_e c^2$と$-m_e c^2 < E_{re} < -m_e c^2/2$であると考えられる。

そこで、本論は前者のエネルギー領域で適用できる変換式は、奇妙さのより少ない方、すなわち、係数が$+\gamma_a$の式であると仮定する。

式(23)が求まれば、tとt'は、初歩的な計算によって求めることができる。

先ず式(23a)のxに式(17a)の右辺を代入すると、次のtが得られる。

$$t = \frac{\gamma_a}{ic}\left(x' + vt'\right). \tag{24}$$

次に式(24)のx'に式(17b)の右辺を代入し、t'には式(17b)から求めた値を代入すると、式(24)は次のようになる。

$$t = \gamma_a\left(t' - vx'/c^2\right). \tag{25}$$

t'も同様な方法で導くと、次のようになる。

$$t' = \gamma_a\left(t + vx/c^2\right). \tag{26}$$

本論は以下に示す変換式を仮にローレンツ変換IIと命名することにする。

$$\begin{aligned}
&x = \gamma_a\left(x' + vt'\right), \qquad x' = \gamma_a\left(x - vt\right),\\
&y = y', \qquad y' = y,\\
&z = z', \qquad z' = z,\\
&t = \gamma_a\left(t' - vx'/c^2\right), \qquad t' = \gamma_a\left(t + vx/c^2\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

また式(25)が適用できるエネルギー領域は、$E_{re,n}$の変わりに式(4)のE_nを用いると、$-m_e c^2/2 < E_n < 0$である(ただし、エネルギーの下限値については、著者の論文[6]に基づいて予測した)[6]。

一方、ローレンツ変換が適用できる物体のエネルギー領域は、$m_0 c^2 < E$である。

ところで、本論で採用した式(15)と式(17)の仮定は、正当な理由があって採用したものではない。これらの仮定は、最終的に導く公式を式(27)と想定し、その公式を導くために採用したに過ぎない。しかし、これらの仮定と類似した仮定は、すでに特殊相対論で 式(1)を導く際にも採用している。したがって、本論で式(15)と式(17)を仮定することは問題ないと考える。ただし、式(27)が物理的に意味のある公式であると確定した訳ではない。

さてローレンツの変換式(1)からは、式(13)と式(14)が導けたので、本論では式(27)から式(13)と式(14)に対応する公式を導くことにする[7]。

いまS'において物体の長さL_0を次のように定義する。

$$L_0 = x_2' - x_1'. \tag{28}$$

この物体の長さをSから測定すると、その長さLは、

$$L = x_2 - x_1. \tag{29}$$

ここで式(27)を使うと、

$$x_1' = \gamma_a \left(x_1 - vt \right),$$
$$x_2' = \gamma_a \left(x_2 - vt \right). \tag{30}$$

それゆえ、

$$x_2' - x_1' = \gamma_a \left(x_2 - x_1 \right). \tag{31}$$

$$L = L_0 / \gamma_a = L_0 \sqrt{1 + v^2 / c^2}. \tag{32}$$

S'の物体の長さをSから計測すると，物体は進行方向に伸びている．この結果は特殊相対論の予測とは異なるが，その原因は係数γとγ_aの相違による。

次は時間について検討してみよう[8]。

一つの時計がS' の点$x' = x_0'$に静止しているとする。時刻が異なる二つの事象を考えてみる。

事象 1: $\left(x_0', t_1' \right)$　　事象 2: $\left(x_0', t_2' \right)$

S'に対して速度vで運動している Sで測られるこの二つの事象の時間座標を計算してみる。

式(25)を用いると、次の式が得られる。

$$t_1 = \gamma_a \left(t_1' - v x_0' / c^2 \right).$$
$$t_2 = \gamma_a \left(t_2' - v x_0' / c^2 \right). \tag{33}$$

これから、

$$t_2 - t_1 = \gamma_a \left(t_2' - t_1' \right). \tag{34}$$

時間差t_2-t_1をτ, t'_2-t'_1をτ_0と書くならば、Sの観測者は次の式を得る。

$$\tau = \gamma_a \tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 + v^2 / c^2}}, \qquad \tau < \tau_0. \tag{35}$$

S'でτ_0が経過するとき、Sの観測者は、Sではτが経過すると結論する。

S'の時計で経過する時間をSから計測すると、S'の時計は進んでいる。この結果も特殊相対論の予測とは異なる。（表I 参照）

	マクロの自由空間	水素原子内の空間
エネルギー−運動量の関係式	$E^2 = c^2p^2 + E_0^2$	$E_{\mathrm{re},n}^2 + c^2p_n^2 = \left(m_{\mathrm{e}}c^2\right)^2$
関係式が適用できるエネルギーの範囲	$mc^2 < E$	$m_{\mathrm{e}}c^2/2 < E_{\mathrm{re}} < m_{\mathrm{e}}c^2$
相対論的エネルギーの公式	$E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$E_{\mathrm{re},n} = \dfrac{m_{\mathrm{e}}c^2}{\sqrt{1+v^2/c^2}}$
適用できる変換式	ローレンツ変換，式(1)	ローレンツ変換 II，式(25) ＊
特殊相対論が予測する運動物体の長さ L	$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$	$L = L_0\sqrt{1+v^2/c^2}$ ＊
本論で導いた運動物体の長さ L	$L = \dfrac{E_0}{E}L_0$	$L = \dfrac{E_0}{E_{\mathrm{re}}}L_0$ ＊
特殊相対論が予測する運動する時計で経過する時間 τ_0	$\tau_0 = \tau\sqrt{1-v^2/c^2}$	$\tau_0 = \tau\sqrt{1+v^2/c^2}$ ＊
本論が予測する運動する時計で経過する時間 τ_0	$\tau_0 = \dfrac{E_0}{E}\tau$	$\tau_0 = \dfrac{E_0}{E_{\mathrm{re}}}\tau$ ＊
超光速度	可能	不可能

表 I マクロの自由空間で成立する特殊相対論の関係式と水素原子内で成立する関係式の比較(ただし、＊印の公式は、検証されたものではない)

III. ディスカッション

式(13)に式(9)と式(10)を掛けると、次のようになる（ここでは、SからS' の物理量を計測するときの公式として、式(13)を用いている）。

$$EL = E_0L_0. \tag{36}$$

$$mL = m_0L_0. \tag{37}$$

またこれらの関係は、式(13)を考慮すれば、

$$L = \frac{E_0}{E}L_0 = \frac{m_0}{m}L_0 = \frac{L_0}{\gamma}, \qquad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} > 1. \tag{38}$$

いまマクロな自由空間で運動している物体の相対論的エネルギーEが静止エネルギーE_0のE/E_0倍であるとしよう。この状況でSの観測者がいま、マクロな自由空間で運動している物体の相対論的エネルギーEが静止エネルギーE_0のE/E_0倍であるとしよう。この状況で Sの観測者がS'の物差しの長さを計測すると，物差しは進行方向にE_0/E倍に収縮している（ただし、E_0＜E）。

またこれらの関係は、エネルギーを質量に置き換えても同様に成立する。

時間については、式(14)に式(9)と式(10)を掛けると、次の式が得られる。

$$E\tau_0 = E_0\tau. \tag{39}$$

$$m\tau_0 = m_0\tau. \tag{40}$$

またこれらの関係は、式(14)を考慮すれば、

$$\tau = \frac{E}{E_0}\tau_0 = \frac{m}{m_0}\tau_0 = \gamma\tau_0. \tag{41}$$

Sからの観測で、S'の物体の相対論的エネルギーEが静止エネルギーE_0のE/E_0倍になると、S'で経過する時間τ_0は、Sで経過する時間τのE_0/E倍になる。

またこれらの関係は、エネルギーを質量に置き換えても同様に成立する。

さて今度は原子内の電子について考える。いま式(32)に式(11)と式(12)の解を掛けると、次の式が得られる。

$$E_{\mathrm{re}}L = E_0L_0. \tag{42}$$

$$m_{\mathrm{re}}L = m_{\mathrm{e}}L_0. \tag{43}$$

またこれらの関係は、式(32)を考慮すれば、

$$L = \frac{E_0}{E_{\mathrm{re}}}L_0 = \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{re}}}L_0 = \frac{L_0}{\gamma_{\mathrm{a}}}, \qquad \gamma_{\mathrm{a}} = \frac{E_{\mathrm{re}}}{E_0} = \frac{m_{\mathrm{re}}}{m_{\mathrm{e}}} < 1. \tag{44}$$

式(44)は、電子の相対論的エネルギーE_{re}が静止エネルギーE_0のE_{re}/E_0倍になったとき、S'の電子の進行方向の長さはE_0/E_{re}倍に伸びることを意味している(ただし、$E_{\mathrm{re}} < E_0$)。

ところで、式(44)の公式中には v が含まれていない。このことから、この公式は粒子が静止している場合にも適用できる公式であると考えられる。特殊相対論において、物体が収縮するのは、物体の進行方向の長さであった。したがって、物体が静止しているときには、粒子の進行方向の長さを議論できない。式(44)の L は粒子の半径とみなすのが妥当と考えられる。

時間については、式(35)に式(11) と式(12)をそれぞれ掛けると、次の式が得られる。

$$E_{\mathrm{re}}\tau_0 = E_0\tau. \tag{45}$$

$$m_{\mathrm{re}}\tau_0 = m_{\mathrm{e}}\tau. \tag{46}$$

またこれらの関係は、式(35)を考慮すれば、

$$\tau = \frac{E_{\mathrm{re}}}{E_0}\tau_0 = \frac{m_{\mathrm{re}}}{m_{\mathrm{e}}}\tau_0 = \gamma_{\mathrm{a}}\tau_0. \tag{47}$$

Sからの観測で、電子の相対論的エネルギーE_{re}が静止エネルギーE_0のE_{re}/E_0倍になる

と、電子の系で経過する時間τ_0は、Sで経過する時間τのE_0/E_{re}倍になる。

マクロの自由空間の運動を問題にした場合には、式 (13)と式(38)、及び式(14)と式(41)の間に、明確な優劣は存在しない。しかし、ミクロの空間まで議論の対象にすると、状況が異なってくる。速度vで運動する物体の長さは式(13)では収縮するが、式(32)では伸張すると予測できる。

また時間についても、式(14)と式(35)を考慮すれば、時間が経過するテンポは、座標系の速度に依存するとは言えない。

量子力学によれば、水素原子内では、ある量子力学的状態にある電子の速度は不確定で、ばらつきがある。それに対して、エネルギーの値は確定している。エネルギーは、速度より本質的な物理量である。

Lやτが速度に依存すると説明する場合には、マクロの自由空間とミクロの原子内の空間に分けて論じなければならない。しかし、Lやτはエネルギーに依存すると説明すれば、マクロの空間とミクロの空間を一括して論じることが可能になる。

VI. 結　論

本論は特殊相対論が予測する式(13)のLと式(14)のτは、式(9)と式(10)を考慮すれば、次の式で表せることを明らかにした。

$$L=\frac{E_0}{E}L_0=\frac{m_0}{m}L_0=\frac{L_0}{\gamma},\qquad \gamma=\frac{E}{E_0}=\frac{m}{m_0}>1. \tag{48}$$

$$\tau=\frac{E}{E_0}\tau_0=\frac{m}{m_0}\tau_0=\gamma\tau_0. \tag{49}$$

一方、原子内の空間で式(27)が適用できるとすれば、Lとτは次の式で表せる。

$$L=\frac{L_0}{\gamma_{\mathrm{a}}}=L_0\sqrt{1+v^2/c^2},\qquad \gamma_{\mathrm{a}}=\frac{1}{\sqrt{1+v^2/c^2}}. \tag{50}$$

$$\tau=\gamma_{\mathrm{a}}\tau_0=\frac{\tau_0}{\sqrt{1+v^2/c^2}}. \tag{51}$$

またこのLとτは式 (11)と式(12)を考慮すれば、次の式で表せる。

$$L=\frac{E_0}{E_{\mathrm{re}}}L_0=\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{re}}}L_0=\frac{L_0}{\gamma_{\mathrm{a}}},\qquad \gamma_{\mathrm{a}}=\frac{E_{\mathrm{re}}}{E_0}=\frac{m_{\mathrm{re}}}{m_{\mathrm{e}}}<1. \tag{52}$$

$$\tau = \frac{E_{\mathrm{re}}}{E_0}\tau_0 = \frac{m_{\mathrm{re}}}{m_{\mathrm{e}}}\tau_0 = \gamma_{\mathrm{a}}\tau_0. \tag{53}$$

式(52)と式(53)を導くには、事前に式(27)を導いておく必要がある。しかし、式(32)と式(35)は、式 (27)がなくても、式(13)と式(14)から推測することはできる。

したがって、式(27)を導かなくても、式(52)と式(53)を推測することはできる(本論は式(27)を導くことを主目的にしていない。したがって、本論は式(27)の正当性についての検証は行わない)。

しかし、電子は現在大きさのない粒子と考えられている。また原子内の空間で式(25)が成立する証拠がある訳でもない。

それ故に、マクロの自由空間で成立する特殊相対論の公式の範囲に限定しておくが、本論は式(48)と式(49)は、式(13)と式(14)よりも一般的な公式であると結論する。

参考文献

[1] 須藤晃俊, Phys. Essays **24**, 2, 301 (2011)..

[2] L. I. シッフ, 量子力学(上)(吉岡書店), p.562.

[3] 須藤晃俊, Phys. Essays **24**, 4, 598 (2011).

[4] 須藤晃俊, Phys. Essays **25**, 4, 488 (2012).

[5] A. P. フレンチ, 特殊相対性理論(培風館), p. 73.

[6] 須藤晃俊, Phys. Essays **22**, 135 (2009).

[7] A. P. フレンチ, 特殊相対性理論(培風館), p. 91.

[8] A. P. フレンチ, 特殊相対性理論(培風館), p. 95.