

存在を予測できる水素原子の未知で超低位のエネルギー準位

須藤晃俊

水素原子のエネルギー準位を古典的に $E_n = -\alpha^2 m_e c^2 / 2n^2$ と表現した場合、本論は水素原子には、 $E_n = -2m_e c^2 + \alpha^2 m_e c^2 / 2n^2$ のエネルギー準位も存在すると理論的に予言した。この極めて低いエネルギー準位にある電子の存在を強力に支持する実験は、三電子対生成である(ただし、三電子対生成を本論の予測の証拠とするには、三電子対生成に対して、従来とは異なる解釈が必要である)。もし、未知のエネルギー準位に電子が存在すれば、この状態にある水素原子は、ダークマターの強力な候補になると予測できる。

1. 序論

自由空間に存在する電子の相対論的エネルギーを E 、運動量を \mathbf{p} とすれば、アインシュタインの関係式は、次の公式で与えられる。

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2. \quad (1)$$

それに対し、著者はクーロン・ポテンシャルを考慮しなければならない水素原子内の電子の関係式として、次の公式を導いた[1]。

$$E_{re,n}^2 + p_n^2 c^2 = (m_e c^2)^2, \quad E_{re,n} = m_e c^2 + E_n, \quad n=1,2,\dots \quad (2)$$

ここで E_{re} は電子の相対論的エネルギーで、電子のエネルギーを絶対的な尺度で記述したものである。またこの場合の \mathbf{p} は角運動量と考えるのが自然である。

式(2)の E_n は古典量子論から導かれる水素原子のエネルギーであり、次の公式で与えられる。

$$E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\dots \quad (3)$$

またディラック方程式から得られる水素原子のエネルギーは、次の公式で与えられる[2]。

$$E = m_e c^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{|k|} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (4)$$

ここで式(4)のエネルギーが絶対的な尺度で記述されていることは重要である。もしこの公式の第3項を無視して近似的に記述すれば、式(4)は次のように書くことができる。

$$E = m_e c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^2 n^2} \quad (5a)$$

$$= m_e c^2 + E_n. \quad (5b)$$

この式のエネルギー E は電子の静止質量エネルギーを含み、絶対的な量で定義されている。式(3)の E_n は、電子の静止質量エネルギーの減少分を表しているのに対し、式(5)の E は、電子の静止質量エネルギーの残与分を表している。

式(1)と式(5)から、静止していた電子が自由空間で運動を始める場合や、原子内に取り込まれる場合、出発点となるエネルギーは、静止質量エネルギーであることが分かる。著者はこのことに着目して式(2)を導いた。

ところで、式(4)で $n/|k|=1$ ときには、式(4)は次のようになる ($n/|k|=1$ のときのエネルギー準位には、 $1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 3d_{5/2}, \dots$ が対応している)。

$$E_n = m_e c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{8n^4} \right). \quad (6)$$

次に式(2)から水素原子のエネルギーを求めてみよう。まず式(2)は次のように書き換えることができる。

$$E_{re,n} = m_e c^2 \left(1 - \frac{p_n^2}{m_e^2 c^2} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

また式(3)は次の式で表せる。

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (8)$$

ただし、 α は次の微細構造定数である。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (9)$$

これより式(2)は次のように書ける。

$$\left(m_e c^2 \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)^2 + p_n^2 c^2 = \left(m_e c^2 \right)^2. \quad (10)$$

この式を展開すると、次の式が得られる。

$$p_n^2 = \left(m_e c \right)^2 \frac{\alpha^2}{n^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4n^2} \right). \quad (11)$$

ところで、 $\alpha^4 = (5.325 \times 10^{-5}) \alpha^2$ だから、ここで $\alpha^4 / 4n^4 \approx 0$ と近似すれば、式(11)は次のように書ける。

$$p_n \approx \frac{\alpha m_e c}{n} \quad (12)$$

次に式(12)の関係を利用すると、式(7)は次のように書ける。

$$E_{re,n} = m_e c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

ここで二項定理の展開式を利用すると、次の式が得られる。

$$E_{re,n} = m_e c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{8n^4} - \dots \right). \quad (14)$$

ディラック方程式からエネルギー準位(4)を導くには複雑な計算を要するが、式(2)から出発すると式(14)を簡単に求めることができる。次章ではディラック方程式と同等と考えられる方程式を式(2)から導くことにする。

II. 水素原子内の電子の状態を記述する方程式の導出

未知の方程式を導く際の参考にするために、ディラック方程式の導き方を確認しておく。

先ず式(1)の E と \mathbf{p} に次の量子化を行う。

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (15)$$

すると次のクライン-ゴールドン方程式が導ける。

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m_e^2 c^4 \psi. \quad (16)$$

この方程式は波動関数を相対論的に解釈したものであるが、この解釈は一般的なシュレーディンガー方程式の波動関数の解釈と、つじつまが合わなかった。

式(16)は空間については一階の微分方程式であるが、時間については二階である。しかし、相対論では時間と空間は対等に扱われていることから、ディラックは時間についても一階の微分方程式を導く必要があると考えた。そして次のような微分方程式を出発点として仮定した[3]。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H \psi(\mathbf{r}, t). \quad (17)$$

またディラックはハミルトニアン H を次のように仮定した。

$$H = -i\hbar \mathbf{c} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_e c^2. \quad (18)$$

ただし、 $\boldsymbol{\alpha}$ は三次元のベクトル、 β は一次元の定数である。

ここで式(18)をもう一度微分し、これが式(16)を満たすと仮定すると、次の関係式が得られる。

$$\left(-i\hbar \mathbf{c} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_e c^2 \right)^2 = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_e^2 c^4. \quad (19)$$

この式を α の成分を用いて書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& -\hbar^2 c^2 \sum_{j,k=1}^3 \alpha_j \alpha_k \nabla_j \nabla_k - im_e c^3 \hbar \sum_{j=1}^3 (\alpha_j \beta + \beta \alpha_j) \nabla_j + \beta^2 m_e^2 c^4 \\
& = -\hbar^2 c^2 \sum_{j=1}^3 \nabla_j^2 + m_e^2 c^4.
\end{aligned} \tag{20}$$

これより、ここで導入した定数 α と β は、次のような関係をみたさなければならないことが分かる。

$$\beta^2 = 1, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0, \quad \alpha_j^2 = 1, \quad \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0, \quad j, k = 1, 2, 3 (j \neq k). \tag{21}$$

これらの関係を満たす最も簡単な行列は 4 行 4 列の行列であることが知られている。ここで次のパウリのスピン行列と単位行列を用いることにする。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

すると、式(21)の条件を満たす 4 行 4 列の行列として、次の形が採用できる。

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{23}$$

この行列を使うと、ディラック方程式は次のように書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \alpha_j \nabla_j + \beta m_e c^2) \psi. \tag{24}$$

ここで波動関数 ψ は、4 行 1 列の行列で表示される。

以上の導出過程を参考にして、式(1)と式(24)の関係に対応する方程式を式(2)から導く[4]。いま式(2)を量子化すると、次の式が得られる。

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m_e^2 c^4 \psi. \tag{25}$$

この式は、式(1)を量子化して得られたクライン-ゴルドン方程式(16)に対応する式である。

次に水素原子内の電子の状態を記述するハミルトニアンを次のように仮定する。

$$H = -i\hbar c \alpha' \cdot \nabla + \beta' m_e c^2. \tag{26}$$

ここで式(26)をもう一度微分し、これが式(25)を満たすと仮定すると、次の関係式を得る。

$$\left(-i\hbar c \alpha' \cdot \nabla + \beta' m_e c^2 \right)^2 = \hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_e^2 c^4. \tag{27}$$

この式を α' の成分を用いて書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& -\hbar^2 c^2 \sum_{j,k=1}^3 \alpha'_j \alpha'_k \nabla_j \nabla_k - im_e c^3 \hbar \sum_{j=1}^3 (\alpha'_j \beta' + \beta' \alpha'_j) \nabla_j + \beta'^2 m_e^2 c^4 \\
& = \hbar^2 c^2 \sum_{j=1}^3 \nabla_j^2 + m_e^2 c^4.
\end{aligned} \tag{28}$$

したがって、ここで導入した定数 α'_j と β' は、次のような関係を満たさなければならない。

$$\beta'^2 = 1, \quad \alpha'_j \beta' + \beta' \alpha'_j = 0, \quad \alpha'^2_j = -1, \quad \alpha'_j \alpha'_k + \alpha'_k \alpha'_j = 0, \quad j, k = 1, 2, 3 (j \neq k). \quad (29)$$

これらの関係を満たす 4 行 4 列の行列として、次の形が予測できる。

$$\alpha'_j = i\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta' = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (30)$$

この行列を使うと、導くべき方程式は次のように書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \alpha'_j \nabla_j + \beta' m_e c^2) \psi \quad (31a)$$

$$= (\hbar c \alpha_j \nabla_j + \beta m_e c^2) \psi. \quad (31b)$$

ディラックの時代には、自由空間の電子には式(1)が適用でき、原子内の電子には式(24)にポテンシャル・エネルギーを組み込んだ次の方程式が適用できると考えられていた。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \alpha_j \nabla_j + \beta m_e c^2 + V) \psi. \quad (32)$$

しかし、式(1)と式(32)を比較すると、両者の形式の相違はあまりに大きい。

ディラックは自由空間で成立する方程式(24)を原子内で適用できるようにするために、ポテンシャル・エネルギーを組み込んだ式(32)を仮定した。

同様な論理を適用して式(1)の中にポテンシャル・エネルギーを組み込めれば、原子内の電子に適用できる公式が導けるはずである。式(2)はこのような論理に基づいて導かれた。

III. 水素原子の超低位のエネルギー準位

著者は以前、式(31)を解けば水素原子のエネルギー準位が導けると考えていた。しかし、式(31)から得られたのは次の解であった。

$$E_{re,n} = \pm c \sqrt{m_e^2 c^2 - p_n^2}. \quad (33)$$

これは式(27)を解くと次の解が得られるのと同様な結果であった[5]。

$$E = \pm c \sqrt{m_e^2 c^2 + p^2}. \quad (34)$$

そこで著者はこの問題の解決は後回しにして、本論では古典論のレベルで式(2)から何が予測できるか検討した。

まず、式(2)を次のように書き換える。

$$\left[m_e c^2 + \frac{V(x)}{2} \right]^2 + p_n^2 c^2 = (m_e c^2)^2. \quad (35)$$

また水素原子内のポテンシャルエネルギーは次の式で表わせる。

$$V_n = -\frac{\alpha\hbar c}{r_n}. \quad (36)$$

いまこの値を式(35)に代入すると、次のようになる。

$$\left(m_e c^2 - \frac{\alpha\hbar c}{2r_n}\right)^2 + p_n^2 c^2 = (m_e c^2)^2. \quad (37)$$

この式を展開して整理すると、 r_n に関する次の二次方程式が得られる。

$$p_n^2 r_n^2 - \alpha\hbar m_e c r_n + \frac{\alpha^2 \hbar^2}{4} = 0. \quad (38)$$

ここで p_n には式(11)の値を代入すると、次の解が得られる。

$$r_n = \frac{\alpha\hbar m_e c \pm \sqrt{\alpha^2 \hbar^2 m_e^2 c^2 - p_n^2 \alpha^2 \hbar^2}}{2p_n^2} = \left[r_e \pm r_e \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right) \right] \frac{n^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4n^2}\right)^{-1}. \quad (39)$$

ディラックがマイナスの解を切り捨てなかったのと同様に、ここでも二つの解を採用しよう。

いま式(39)の分子のプラスの解を採用した場合の半径を r_n^+ とすると、 r_n^+ は次の値になる。

$$r_n^+ = \frac{n^2}{\alpha^2} r_e = n^2 a_B. \quad (40)$$

一方、式(39)のマイナスの解を採用した場合の半径を r_n^- とすると、 r_n^- は次の値になる。

$$r_n^- = \frac{r_e}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4n^2}\right)^{-1}. \quad (41)$$

この r_n^+ と r_n^- の値を次の公式に代入する。

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}. \quad (42)$$

そのとき得られるエネルギーを E_n^+ 、 E_n^- とすると、次の解が得られる。

$$E_n^+ = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (43)$$

$$E_n^- = -2m_e c^2 + \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (44)$$

またこれらのエネルギーを式(2)で定義した E_{re} を用いて絶対的な尺度で記述すれば、次のようになる。

$$E_{re,n}^+ = m_e c^2 + E_n^+ = m_e c^2 - \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (45)$$

$$E_{re,n}^- = m_e c^2 + E_n^- = -m_e c^2 + \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (46)$$

以上のことを図示すれば、次のようになる。(図 1 参照)

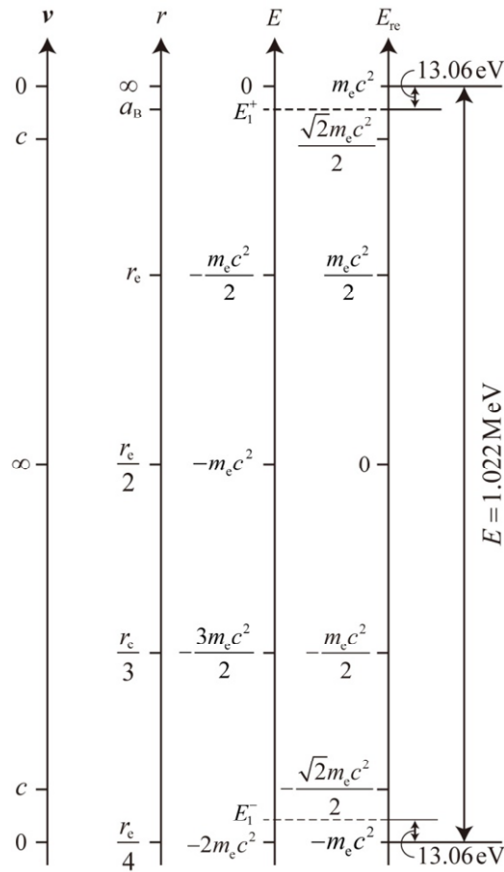


図 1. 古典量子論が予測する水素原子のエネルギー準位 E_n^+ と本論で新たに存在が指摘されたエネルギー準位 E_n^-

E_1^+ と E_1^- の位置は、図を見やすくするために、エネルギー幅を誇張して描いた。また r と v は、古典的な議論の範囲で意味をもつ物理量である。古典的に議論すれば、粒子としての電子の速度は超光速になるし、 $r=r_e/2$ では無限大にもなる[ただし、 $E_{re} = m_e c^2 (1 + v^2 / c^2)^{-1/2}$]

ただし本論で導いた電子軌道半径 r は、古典論量子論の範囲で議論したときに意味を持つ物理量であることを確認しておく(量子力学では r は期待値としての意味を持つ)。

次章では E_n^- の物理的な意味について考察する。

IV. ディスカッション

いま自由空間に静止している一個の電子について考える。この電子が光子を吸収すれば光子のエネルギーは、すべて電子の運動エネルギーに変換する。

今度は電子が原子核(陽子)の引力によって、原子内に取り込まれる場合を考える。

有名なヴィリアル定理によれば、系全体の運動エネルギーを K 、また系全体のポテンシャル・エネルギーを V とすると、 K と V の間には次の関係が成立する。

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle. \quad (47)$$

K の時間平均は、 V の時間平均の $-1/2$ に等しい。また系全体の運動エネルギー K の時間平均と系全体の全エネルギー E の時間平均の和は 0 になる。すなわち、

$$\langle K \rangle + \langle E \rangle = 0. \quad (48)$$

次に式(47)と式(48)を統合すると次のようになる。

$$-\langle E \rangle = \langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle. \quad (49)$$

系全体で減少したポテンシャル・エネルギーの $1/2$ は、系全体の運動エネルギーに転化され、残りのエネルギーは光子として、原子外に放出される。

水素原子内で、原子核は重くて静止していると見なせるから、近似的に系全体の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを電子のエネルギーとして考察する。

いま自由空間に静止していた電子は、外部からエネルギーを吸収することなしに光子を放出し、同時に光子のエネルギーと同量の運動エネルギーを獲得する場合を考える。この状況でエネルギー保存則を満たすには、運動エネルギーと光子のエネルギー源が必要になる。ヴィリアル定理を考慮すれば、これらのエネルギー源はポテンシャル・エネルギーである。しかし電子が静止しているときに電子が持っているエネルギーは、静止質量エネルギーだけである。

そこで、著者は電子の静止質量エネルギーとポテンシャル・エネルギーの関係を表す公式として、次の公式を提示した[6]。

$$V(r) = -\Delta m_e c^2. \quad (50)$$

この公式によれば、水素原子のポテンシャル・エネルギーは、原子内の電子の静止質量エネルギーの減少分に対応している。

このことは、水素原子内の電子の全力学的エネルギーとポテンシャル・エネルギーは次の範囲の値を持つことを示している。

$$-\frac{1}{2}m_e c^2 \leq E < 0, \quad \frac{1}{2}m_e c^2 \leq E_{re} < m_e c^2. \quad (51)$$

$$-m_e c^2 \leq V(r) < 0. \quad (52)$$

これらの公式から、量子力学を適用しなくても水素原子のエネルギー値に下限があること、また電子が原子核に近付ける最短近接距離があることも予測できる。

ここで古典的に電子が原子核にどこまで近付けるか計算してみよう。

水素原子のポテンシャル・エネルギーを表す公式は、次の式である。

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (53)$$

ポテンシャル・エネルギーの最小値は $-m_e c^2$ であるから、このエネルギーを有する電子の最短近接距離では、次の式が成立する。

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -m_e c^2. \quad (54)$$

この式から次の値が得られる。

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = r_e. \quad (55)$$

ここで r_e は古典電子半径である。

ところで、著者は別の論文でボーアの量子条件を修正することによって、水素原子の軌道半径の公式の中に、原子核の大きさを組み込むことに成功した[7]。すなわち、

$$r_n = n^2 a_B \quad (56a)$$

$$= \frac{r_e}{4} + \frac{r_e}{\alpha^2} \left(n^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (56b)$$

この式から陽子の半径は $r_p/4$ と予測できるので、電子が原子核に吸収されないことが理解できる。

以上の考察から、外殻軌道にある電子が光子を放出して E_n^+ のエネルギー準位から E_n^- のエネルギー準位に遷移することは、不可能であることが分かる。

しかし本論は、以下で E_n^- のエネルギー準位にある電子が存在していると確信できる強力な証拠を提示する。

入射する γ 線のエネルギーが 1.022MeV 以上 ($2m_e c^2$ 以上)、すなわち、電子と陽電子の質量の和に相当するエネルギーを超えると、 γ 線は原子核のクーロン・ポテンシャルの影響を受けて突然生滅し、電子と陽電子の対を生成させることが可能になる。ディラックの空孔理論によれば、 $E = -2m_e c^2$ のエネルギーを持つ電子が 1.022MeV 以上のエネルギーを吸収すると、電子は質量を獲得して真空から飛び出す。そして後に残った真空の孔が陽電子とみなされる。しかし、この理論では電子と陽電子が非対称に扱われているのが難点とされている。

著者の考えによれば、この状況で対生成する電子と陽電子は、生成前には共に、 $-m_e c^2$ (-0.511MeV) のエネルギーを持っている仮想粒子である(それぞれの仮想粒子のエネルギーを E_{re} を用いて記述すれば、 $E_{re}=0$)。そして γ 線のエネルギーをすべて吸収した電子と陽電子の対は、古典的には原子核の中心から、 $r_e/2$ の近傍で生成される。(図 2 参照)

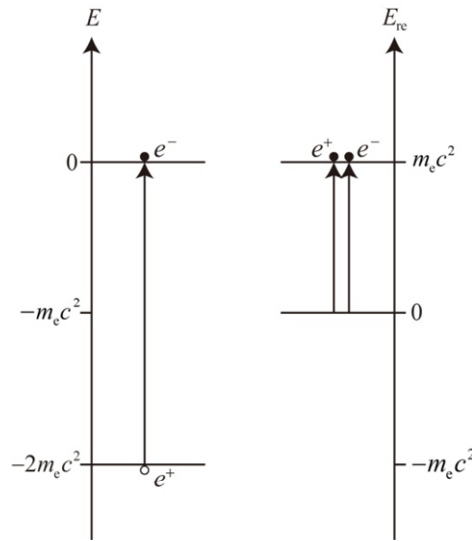


図 2. ディラックの空孔理論と本論の解釈の相違

電子 2 個分のエネルギー、すなわち 1.022MeV のエネルギーを持つ γ 線が原子核(陽子)に向かって入射してくる場合を考える。ディラックの理論ではこの γ 線が原子核周辺の真空を構成する仮想電子($E = -2m_e c^2$, つまり、 $E_{re} = -m_e c^2$)にすべてのエネルギーを与えると、仮想電子は静止質量を獲得し、自由空間に電子として出現する。そして、真空に空いた孔が電子の反粒子である陽電子であると解釈される。

一方、著者の解釈では、 1.022MeV のエネルギーをもつ γ 線が $r=r_0/2$ の位置で仮想的な電子と陽電子の対に静止質量を与えて、電子と陽電子の対が生成されると考える。もし入射した γ 線のエネルギーが 1.022MeV 以上になれば、対生成された電子と陽電子は、速度をもつことが可能になる。

この状況では、 γ 線のエネルギーは、電子と陽電子の静止質量エネルギーに転化され、電子と陽電子は対等に扱われることになる。

結局、ディラックの空孔理論の根底には式(1)があるから、真空を満たす粒子のエネルギー E は、 $E \leq -2m_e c^2$ (つまり、 $E_{re} \leq -m_e c^2$) と考える[8]。一方、本論は式(2)に基づいて議論を進めるので、 $E_{re} = 0$ の仮想的な粒子が真空を満たしていても、何の問題も生じない。

ディラックと本論で電子対生成に関する解釈に相違が生じたのは、以上の理由による。

ところで、 E_n のエネルギー準位に電子が存在する場合、電子が励起されて原子外に放出されるために必要なエネルギー E は、式(44)から次のようになる。

$$E = 2m_e c^2 - \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2} \approx 2m_e c^2 = 1.022\text{MeV}. \quad (57)$$

今度は入射する γ 線が電子の質量 4 個分、すなわち $4m_e c^2$ (2.044MeV) 程度のエネルギーを持っている場合を考える(このエネルギーは三電子対生成を起こすのに必要なしきい値である)。

古典的に議論すれば、 γ 線は $r=r_0/2$ の近傍で電子と陽電子の対を生成させることができる。

(図 3 参照)

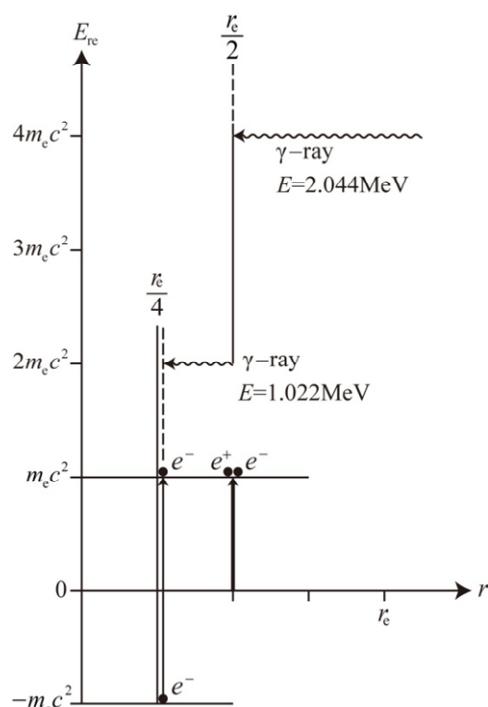


図 3. 三電子対生成に関する本論の解釈

電子 4 個分のエネルギー、すなわち 2.044MeV のエネルギーを持つ γ 線が原子核(陽子)に向かって入射してくる場合を考える。本論の立場では、この γ 線は $r=r_c/2$ の位置で 1.022MeV のエネルギーを仮想粒子の対に与え、電子と陽電子の対が生成される。その後その γ 線が陽子近傍の電子軌道にある電子にエネルギーを与えると、電子は励起して自由空間に出現する。その結果、自由空間に 2 個の電子と 1 個の陽電子が出現する。しかし、ディラックの空孔理論によれば、2 個目の電子が生成される際には、同時に陽電子が生成されるはずである。しかし、実際には 2 個目の陽電子は観測されていない。

この対生成に 1.022MeV のエネルギーを消費したとしても、 γ 線はまだ電子の質量 2 個分、すなわち $2m_e c^2$ (1.022MeV) 程度のエネルギーを持っている。この γ 線がさらに原子核(陽子)の近傍まで近づいたとき、陽子周辺の軌道の電子がこのエネルギーを吸収すると、電子は外殻軌道に励起するか、原子外に放出される。

一般に、2 個の電子と 1 個の陽電子が生成される三電子対生成は、原子核の近傍ではなく、外殻軌道電子の近傍で電子対生成が起こるとされている。しかし、著者はエネルギー保存則を考慮すれば、反跳される電子は極めて低位のエネルギー状態にあると結論する方が自然と考える。

V. 結論

著者は以前、アインシュタインの関係式(1)との類推から、水素原子内で成立するエネルギー-運動量の関係式(2)を導いた。この公式が適用できるエネルギー領域は、単純には次の領域であると考えられる。

$$-m_e c^2 \leq E_{re} \leq m_e c^2. \quad (58)$$

しかし、本論は次のエネルギー領域も含まれると証明した訳ではない。

$$-\frac{1}{2}m_e c^2 \leq E_{re} \leq \frac{1}{2}m_e c^2. \quad (59)$$

本論は式(41)と式(42)から導けるマイナスのエネルギーの解をディラックにならって採用した。その結果、水素原子には極めて低いエネルギー準位が存在する可能性を予測できた。

既知の E_n^+ と未知のエネルギー準位 E_n^+ は、次の公式で与えられる。

$$E_n^+ = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (60)$$

$$E_n^- = -2m_e c^2 + \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (61)$$

これらの公式をエネルギー E_{re} を用いて絶対的な観点から記述すれば、次のようになる。

$$E_{re,n}^+ = m_e c^2 - \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (62)$$

$$E_{re,n}^- = -m_e c^2 + \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2n^2}. \quad (63)$$

またこれらのエネルギー準位にある電子の軌道半径 r は次のようになる。

$$r_n^+ = \frac{n^2}{\alpha^2} r_e = n^2 a_B. \quad (64)$$

$$r_n^- = \frac{r_e}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4n^2} \right)^{-1}. \quad (65)$$

著者は E_n^- のエネルギー準位にある電子の存在を証明する強力な証拠は、三電子対生成の現象であると予測する。

もしエネルギー E_n^- の状態に電子が存在すれば、他の原子にも当然同様なエネルギー準位の存在が予測できる。そしてこれらの原子、またはこれらの原子から生成される分子は、ダークマターの有力な候補になると予測できる。

参考文献

- [1] 須藤晃俊, Phys. Essays **24**, 301 (2011).
- [2] L. I. シッフ, 量子力学(下) (吉岡書店), p562.
- [3] P. A. M. ディラック, 現代物理学講義(培風館), p20.
- [4] 須藤晃俊, Phys. Essays **24**, 598 (2011).
- [5] P. A. M. ディラック, 現代物理学講義(培風館), p14.
- [6] K. Suto, Phys. Essays **22**, 135 (2009).
- [7] K. Suto, Phys. Essays **25**, 488 (2012).
- [8] P. A. M. ディラック, 現代物理学講義(培風館), p16.