水素原子内における特殊相対論の関係式の修正とボーア半径

原子内の空間では，運動する電子の速度が増すと運動エネルギーは増加するが，全エネルギーは減少する.

この事実から，原子内の空間では，特殊相対論の関係式，$E^2 = c^2p^2 + E_0^2$ ，は修正を迫られることになる.

本論では特殊相対論の関係式に代わる新しい関係式を導く．さらに，その関係式を用いて，水素原子の半径を計算すると，ボーア半径の他に原子核，すなわち，陽子の大きさまで導ける.

また，本論は，原子核の周囲を回る電子が，原子核に吸収されない理由を量子力学の助けを借りずに説明する.

Ⅰ.序論

20世紀に構築された物理学の2大理論は，相対性理論と量子力学で異論はなかろう．一般に相対性理論はマクロな世界を記述する物理学であり，量子力学はミクロの世界を記述する物理学であると考えられ，両者のすみわけは一応できているように思われる．しかし，この2大理論を融合させることは、完全には成功していない.

相対性理論では，物理量は実数で記述されるが，量子力学では，演算子で記述される．その意味するところは，次のように解釈できよう。すなわち，相対性理論は実在の客観的あり方，つまり我々が観測しようがしまいが，それとは無関係に存在していると考えられる物理法則について記述する．一方，正統的な量子力学では，観測が決定的かつ本質的な意味を持ち，理論は観測値の間の関係を記述した数学となる．量子力学は，観測する以前の実在のあり方など問題にはしない．両理論の間の溝は深いのである.

そこで，本論では両理論の融合を目指すのではなく，支点を変えて，特殊相対論を代表する関係式が，原子内のミクロな空間でも成立するのか，検討を試みる.

特殊相対論の重要な式に，

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \qquad (Ⅰ．1)$$

がある． Eは物体または粒子の全エネルギーであり，E_0は（物体または粒子の）静止質量エネルギーである.

マクロな空間内で運動する粒子は，速度が増すと運動エネルギーと全エネルギーは増加する．このことから，$E > E_0$が成立する.

しかし，原子内の電子の場合，速度が増すと運動エネルギーは増加するが，全エネルギーは減少する．このことから，原子内では，$E < E_0$ が成立すると予想される.

そこで，マクロな空間で成立する特殊相対論の関係式（Ⅰ．1）が原子内でも成立するのか，次章で検討を試みる.

Ⅱ．水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係

先ず水素原子内の電子のエネルギーについて復習する[1)]．

原子核は重いから静止しているとみなす．そして，原子核から半径rの円軌道上を電子が速さvで回っている場合を考える．（ただし，電荷$-e$，質量m）

このときの運動方程式は，

$$mv^2/r = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \qquad (\mathrm{II}.\ 1)$$

これより，

$$mv^2/2 = (1/2)e^2/(4\pi\varepsilon_0 r) \qquad (\mathrm{II}.\ 2)$$

ところで，電子の持つ位置のエネルギー$V(r)$は，

$$V(r) = -e^2/(4\pi\varepsilon_0 r) \qquad (\mathrm{II}.\ 3)$$

(Ⅱ．2)の右辺は，位置のエネルギーの$-1/2$倍であるから，次の関係が成立する．

$$2(mv^2/2) = -V(r) \qquad (\mathrm{II}.\ 4)$$

したがって，電子の全エネルギーEと運動エネルギーKと位置のエネルギーの関係は次のようになる．

$$\begin{aligned} E &= V(r) + K \\ &= -2K + K \\ &= -K \\ &= V(r)/2 \end{aligned} \qquad (\mathrm{II}.\ 5)$$

電子の全エネルギーは，運動エネルギーの符号を換えたものに等しく，また，位置のエネルギーの半分に等しいことが知られている．

以上の関係を踏まえ，水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を特殊相対論の教科書を参考にして導くことにする[2)]．

古典力学では，運動エネルギーの増加は，外力によってなされた仕事に対応する．

つまり，

$$dK = Fdx = (dp/dt)dx = vdp \qquad (\mathrm{II}.\ 6)$$

また，マクロな空間を運動する粒子の全エネルギーの増加分と運動エネルギーの増加分は，位置のエネルギーの増減がない場合には，等しい．

すなわち,

$$dE=dK \qquad (\text{Ⅱ}.\ 7)$$

これより,

$$dE=vdp \qquad (\text{Ⅱ}.\ 8)$$

ところが,原子内で運動する電子の場合,(Ⅱ.5)より全エネルギーの減少分と運動エネルギーの増加分が,等しい.すなわち,

$$-dE=dK \qquad (\text{Ⅱ}.\ 9)$$

この式と(Ⅱ.6)より,

$$dE=-vdp \qquad (\text{Ⅱ}.\ 10)$$

ところで,(Ⅰ.1)は(Ⅱ.8)から導かれる.しかし,水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係は,(Ⅱ.10)から導かなければならない.

さて,古典力学では,

$$m=p/v \qquad (\text{Ⅱ}.\ 11)$$

また,特殊相対論より,

$$m=E/c^2 \qquad (\text{Ⅱ}.\ 12)$$

(Ⅱ.11)と(Ⅱ.12)より,

$$E=c^2p/v \qquad (\text{Ⅱ}.\ 13)$$

次に(Ⅱ.10)と(Ⅱ.13)の右辺どうし,左辺どうしを乗じると,

$$EdE=-c^2pdp \qquad (\text{Ⅱ}.\ 14)$$

これを積分すると,

$$E^2=-c^2p^2+E_0^2 \qquad (\text{Ⅱ}.\ 15)$$

E_0^2は,エネルギーの二乗の形で示される積分定数である.

Ⅲ．エネルギーEの意味

（Ⅱ．15）のエネルギーEは何を意味するのであろうか.

古典力学は，絶対エネルギーではなく，エネルギーの差を重視する.

しかし，本論では，電子のエネルギーの絶対量も考慮することにする.

既存の理論では，電子の全エネルギーをゼロとみなすのは，電子を原子核から無限に引き離し，その場所に静止させた場合であった.（Ⅱ．5）の全エネルギーは，その観点から得られた値である.

しかし，無限遠の位置に電子を静止させた場合でも，電子の絶対的なエネルギーは本来ゼロではなく，電子は静止質量エネルギーE_0を持つはずである.

このことと（Ⅱ．5）を考慮して，水素原子内の電子の絶対的な意味における全エネルギーE_{ab}を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{ab}} &= E_0 + V(r) + K \\
&= E_0 - 2K + K \\
&= E_0 - K \\
&= E_0 + V(r)/2
\end{aligned}
\qquad (\text{Ⅲ．1})
$$

本論は（Ⅱ．15）のエネルギーEを(Ⅱ．5)の全エネルギーではなく，（Ⅲ．1） の全エネルギーE_{ab}と見なす.

すると（Ⅱ．15）は次のようになる.

$$
E_{\mathrm{ab}}{}^2 + c^2 p^2 = E_0{}^2 \qquad (\text{Ⅲ．2})
$$

この式が水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を示すものであり，特殊相対論の公式（Ⅰ．1）とは異なる結果が得られた.

Ⅳ．水素原子内の電子の軌道半径とエネルギー

前章で得られた（Ⅲ．2）から，物理学に新たな進展があるか，本章で考察する．
古典量子論によれば，水素原子の古典電子半径a_nとエネルギーE_nは次の式で与えられる．

$$a_n=\{4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_0e^2)\}n^2 \qquad (Ⅳ．1)$$

$$E_n=-e^2/(8\pi\varepsilon_0a_n) \qquad (n=1，2，\cdots) \qquad (Ⅳ．2)$$

ここで，nは主量子数である．
それでは，本論の立場ではa_nとE_nは，どのような値になるであろうか．
先ず，本論（Ⅲ．1）で定義した電子の全エネルギーと（Ⅲ．2）から，

$$(E_0-K)^2+c^2p^2=E_0^2 \qquad (Ⅳ．3)$$

これより，

$$p=(2E_0K-K^2)^{1/2}/c \qquad (Ⅳ．4)$$

ところで，ボーアの量子条件は，

$$p\cdot 2\pi r_n=2\pi n\hbar \qquad (Ⅳ．5)$$

この式の運動量に(Ⅳ．4)の値を代入すると，

$$(2E_0K-K^2)^{1/2}r_n/c=n\hbar \qquad (Ⅳ．6)$$

両辺を二乗し，運動エネルギーに（Ⅱ．2）の右辺の値を代入すると，

$$〔2m_0c^2(1/2)e^2/(4\pi\varepsilon_0r_n)-(1/2)^2\ \{e^2/(4\pi\varepsilon_0r_n)\}^2〕r_n^2=n^2c^2\hbar^2 \qquad (Ⅳ．7)$$

この式をr_nについて解くと，

$$\begin{aligned}r_n&=(1/4)e^2/(4\pi\varepsilon_0m_0c^2)+\{4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_0e^2)\}n^2\\&=(r_e/4)+(1/r_e)(\lambda_c/2\pi)^2n^2\\&=(r_e/4)+n^2a_B\end{aligned} \qquad (Ⅳ．8)$$

ここで,r_eは古典電子半径，λ_cは電子のコンプトン波長で，それぞれ次の式で与えられる．

$$r_e = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2) \qquad (\text{Ⅳ}.\ 9)$$

$$\lambda_c = h/(m_0 c) \qquad (\text{Ⅳ}.\ 10)$$

本論で求めた半径r_n[(Ⅳ．8)]には，古典量子論から導かれる値（Ⅳ．1）の他に$r_e/4$の項が追加されている．

また，$n=1$の場合の半径は，次のようになる．

$$r_1 = (r_e/4) + a_B \qquad (\text{Ⅳ}.\ 11)$$

(ただし，a_Bはボーア半径)

さらに，（Ⅳ．8）のr_nを（Ⅳ．2）に代入すると，

$$\boldsymbol{E}_n = -e^2/(8\pi\varepsilon_0 r_n) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (\text{Ⅳ}.\ 12)$$

Ⅴ．結論

1．マクロな空間では，特殊相対論の関係式（Ⅰ．1）が成立するが，水素原子内の空間では，（Ⅲ．2）が成立する．

2．（Ⅳ．8）で新たに追加された項$r_e/4$は，原子核，すなわち，陽子の半径に関係していると考えるのが自然である．今日では，原子核の大きさは，質量をAとすれば，$(1.2\times10^{-15})A^{\frac{1}{3}}m$でよく表されることがわかっているが[3]，本論によれば，陽子の半径は，$0.70\times10^{-15}m$となる．

また，（Ⅳ．11）から，ボーアの古典量子論が予測する電子軌道半径は，原子核の中心から軌道までの距離ではなく，その表面から軌道までの距離であったことが分かる．

ボーアの原子模型では原子核を点とみなすため，原子核の大きさが考慮されていないのである．

3．原子外で静止質量エネルギーE_0を持つ電子が，原子内に取り込まれた場合，電子の全エネルギーは減少する．いま，減少したエネルギーを$-E'$とする．このとき，$E'/2$は電子の運動エネルギーに転化し，残りの$E'/2$は，光子として原子外へ放出される．

つまり，

$$-E'+K+\hbar\omega=0 \tag{Ⅴ．1}$$

（ただし，$\hbar\omega$は光子のエネルギー）

また，（Ⅲ．1）を考慮すると$-E'$は電子の位置のエネルギーに対応する．

すなわち，

$$-E'=V(r) \tag{Ⅴ．2}$$

これより，

$$-E'+K+\hbar\omega=V(r)+K+\hbar\omega=0 \tag{Ⅴ．3}$$

このことから，古典力学でも，電子の全エネルギーE_{ab}の下限の存在を予測できる．

位置のエネルギーが静止質量エネルギーをすべて消費した状態は，

$$E_0-2K=0 \tag{Ⅴ．4}$$

このとき，電子の運動エネルギーは，$m_0c^2/2$になることから，既存の理論における電子の全エネルギーEとE_{ab}の関係は，次のようになる．

$$E=-m_0c^2/2=-E_{ab} \tag{Ⅴ．5}$$

このエネルギーの値が古典力学で考えられる電子の全エネルギーの最低値である.

この値を（Ⅳ．12）のE_nに代入すると，最短近接距離rとして以下の値が得られる.

$$r = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2) = r_\mathrm{e} \quad (\mathrm{V}.\ 6)$$

原子核の半径は（Ⅳ．8）から，$r_\mathrm{e}/4$程度と考えられるから，古典力学に基づく予測でも，電子は，原子核に吸収されないことが分かる.

また，この距離r_eはラザフォード散乱において，αー粒子が原子核に接近するときの最短近接距離に一致する[4].

4．本論は，量子力学を否定するものではなく，また，それを超えた理論を目指したものでもない.本論で導いた結論は，本来は量子力学成立以前の古典量子論を構築する段階で到達すべきものであった.そして，本論で得た結論を包含する新理論（量子力学）を構築すべきであった．その意味で量子力学には若干の修正が必要となる.

参考文献

1）江沢洋：現代物理学，271ページ，朝倉書店

2）A．P.フレンチ著：MIT物理「特殊相対性理論」，18ページ，培風館

3）江沢洋：量子力学（Ⅰ），33ページ，裳華房

Ⅵ. 追記

量子力学の正統的解釈(コペンハーゲン解釈)によれば,ミクロの粒子,すなわち量子は,「その位置を観測するまでは波のように振る舞い,観測した瞬間粒子としての位置が確定する」と考えられている.しかし,式(Ⅳ. 8)で陽子の大きさが計算によって導けたことにより,量子の一種である陽子は,観測しなければその位置は不確定であっても,ア・プリオリに大きさを持った粒として空間内のある場所に局在化している(＝波のように広がっていない)ことが示せた.つまり,陽子は粒子として存在しているにもかかわらず,その位置を観測によって確定するまでは,波のように振る舞う訳である.

この事実を念頭において陽子と同じ量子の仲間の電子を使った有名な「二重スリットの実験」について考察すると,電子銃から放出された個々の電子は,一個の粒としてどちらか一つのスリットを通り抜けているにもかかわらず, スクリーンの背後に到達した多数の電子の分布を観測すると,スクリーン上には電子の波動性を示す干渉縞が生じることが予測できる.

「二重スリットの実験」に関する従来の量子力学の説明では,「分割不可能な粒子が,あたかも二つのスリットを同時に通ったかのように振る舞う」とか「電子は波として二つのスリットを同時に通ったとしかいいようがない」などという曖昧な表現や,「電子がスリット１を通った状態とスリット２を通った状態の重ね合わせ」などと説明されてきた.

しかし,「電子は粒としてどちらか一つのスリットを通り抜けているにもかかわらず, 最終的には電子の波動性を示す干渉縞が生じる」という本論の予測が正しいなら,コペンハーゲン解釈は修正を迫られることになる.