ローレンツ変換に替って原子内で適用される新変換式

著者は，水素原子内の電子の全エネルギーと運動量の間には，次の関係式が成立することを示した．$E_{ab}^2 + c^2p^2 = E_0^2$

この関係式から，原子内の電子の質量は，速度が増すと減少することが簡単に導ける．

このことから，原子内の空間では，ローレンツの変換式に替わる新しい変換式が必要との認識に到達する．

そこで，本論では，その新しい変換式を導く．

その結果，原子内で運動，叉は原子内を通過する粒子の長さは伸びること，また，その粒子の座標系で経過する時間は進むことが予測できる．

さらに，原子内では，光速が自然界の上限速度として機能しないことも分かる．このことから，超光速で運動する粒子タキオンの存在も予測できる．

Ⅰ．序論

著者は，水素原子内では，特殊相対論の関係式，$E^2 = c^2p^2 + E_0^2$ は成立せず，次の関係式が成立することを示した[1)]．

$$E_{ab}^2 + c^2p^2 = E_0^2 \qquad (Ⅰ．1)$$

ここで，E_{ab} は絶対的な尺度で表わした電子の全エネルギーであり，p は電子の運動量である．

ところで，特殊相対論では，次の式も成立する．

$$m=E/c^2 \qquad (Ⅰ．2)$$

また，古典力学では，次の式が成立する．

$$m = p/v \qquad (Ⅰ．3)$$

この２式から次の式が得られる．

$$cp = Ev/c \qquad (Ⅰ．4)$$

いま，マクロな空間で成立する（Ⅰ．4）の E を E_{ab} に置き換えても，この関係式は成立すると仮定しよう．

（Ⅰ．4）の cp を（Ⅰ．1）に代入して整理すると，次の式が得られる．

$$E_{ab} = E_0/(1 + v^2/c^2)^{1/2} \qquad (Ⅰ．5)$$

また，（Ⅰ．2）を考慮すると，次の式も得られる．

$$m = m_0/(1 + v^2/c^2)^{1/2} \qquad (\mathrm{I}.\ 6)$$

水素原子内で運動する粒子は，速度が増すと質量が減少することが分かる．

この結果は，特殊相対論の予測とは異なる．

（Ⅰ．6）の関係から，原子内で運動，叉は原子内を通過する粒子の長さは伸び，粒子の座標系の時計で経過する時間は，進むことが予想できる．

このことから，原子内の空間でお互いに等速運動する２つの座標系では，ローレンツ変換が適用できず，新しい変換式の導入が必要になる．

Ⅱ．ローレンツ変換に替わる新しい変換式の導入

量子力学では原子内の電子の運動について，描像を描くことができない．そこで，新しい変換式は，古典量子論の描像を用いて求めることにする．

ところで，有名な“双子のパラドックス”の思考実験では，宇宙旅行をする兄が経験する加速度運動も，$t \to 0$ としたときの極限の時間では，特殊相対論で記述できることが知られている．

同様の理由により，原子内の電子が，時々刻々速度を変えるとしても，これから求める新しい変換式が，原子内の電子に適用できると仮定する．

いま，原子内の楕円軌道上を運動する電子の座標系 S′ と原子核の座標系 S について考える．

さて，量子力学では，複素数が本質的な役割を果たしている．

そこで，新しい変換式を導く際にも，複素数が重要な役割を果たすと仮定する．

また，未知の変換式は，ローレンツの変換式を導く過程を参考にしながら，導くことにする[2)]．

先ず，これから求める新しい変換式は線形でなければならない．

さらに，相対性原理から出てくる対称性を考慮して，次の関係式が成立すると仮定する．

$$x = ax' + ibt' \quad , \quad x' = ax - ibt \qquad (\text{Ⅱ}.\ 1)$$

座標系 S′ から見た座標系 S の原点の運動は，初めの式で $x = 0$ とすれば求められる．

逆に座標系 S から見た座標系 S′ の原点の運動は，二番目の式で $x' = 0$ とすれば求められる．いま，それぞれの座標系から見た別の座標系の速さを v とする．(Ⅱ.1) の二つ目の式を微分すると，次の条件が成り立つ．

$$ib/a = v \qquad (\text{Ⅱ}.\ 2)$$

次に，x 軸上を正の方向に進む光信号を二つの座標系 S と座標系 S′ から見た場合を考える．二つの座標系の x 軸の原点が一致したとき，原点 0 から放出された光の信号は，座標系 S および座標系 S′ から見て，それぞれ次の式で記述できると仮定する．

$$x = ict \quad , \quad x' = ict' \qquad (\text{Ⅱ}.\ 3)$$

この式の x および x' を (Ⅱ．1) に代入すると次の式が得られる．

$$ct = (ac + b)t' \quad , \quad ct' = (ac - b)t \qquad (\text{Ⅱ}.\ 4)$$

この二式で t と t' を消去して，(Ⅱ．2) の関係を用いると，次の式が得られる．

$$c^2 = a^2(c^2 + v^2) \qquad (\text{Ⅱ}.\ 5)$$

これより，

$$a = 1/(1+v^2/c^2)^{1/2} \qquad (\text{Ⅱ}.\ 6)$$

いま，この係数 a を γ_a と書き改めると，(Ⅱ．1) は，次のようになる．

$$\begin{aligned} x &= (x' + vt')/(1+v^2/c^2)^{1/2} \\ &= \gamma_a(x' + vt') \\ x' &= (x - vt)/(1+v^2/c^2)^{1/2} \\ &= \gamma_a(x - vt) \end{aligned} \qquad (\text{Ⅱ}.\ 7)$$

ただし，

$$\gamma_a(v) = (1+v^2/c^2)^{-1/2} \qquad (\text{Ⅱ}.\ 8)$$

一方，特殊相対論のローレンツの変換式に出てくる係数 $\gamma(v)$ は，次の式で与えられた．

$$\gamma(v) = (1-v^2/c^2)^{-1/2} \qquad (\text{Ⅱ}.\ 9)$$

本論で導いた変換式 (Ⅱ．7) の係数は $\gamma_a(v)$ (<1) であるが，ローレンツの変換式に表れる係数は $\gamma(v)$ (>1) である．

(Ⅱ．7) が得られれば，初等的な数学の計算から，時間 t および t' に対する次の式が得られる．

$$\begin{aligned} t &= \gamma_a(t' + vx'/c^2) \\ t' &= \gamma_a(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad (\text{Ⅱ}.\ 10)$$

ここで，座標系 S から見た座標系 S′ と，座標系 S′ から見た座標系 S の両方の場合の変換式を以下に示す．

$$\boxed{\begin{aligned} &x' = \gamma_a(x - vt) \quad , \quad x = \gamma_a(x' + vt') \\ &y' = y \quad , \quad y = y' \\ &z' = z \quad , \quad z = z' \\ &t' = \gamma_a(t - vx/c^2) \quad , \quad t = \gamma_a(t' + vx'/c^2) \qquad (\text{Ⅱ}.\ 11) \end{aligned}}$$

ただし，$\gamma_a = (1+v^2/c^2)^{-1/2}$，$v$ は座標系 S から見た座標系 S′ の速さ．

本論で得られた新しい変換式（Ⅱ．11）とローレンツの変換式の相違は，係数 γ_a と γ の違いだけである．

したがって，新しい変換式は，ローレンツの変換式と同様に座標変換に対して不変であることが分かる．

それでは，原子内を運動する物体の長さは，どうなるか．

静止状態で長さ l_0 の粒子が，原子内を速さ v で運動する場合を考える．この粒子の進行方向の長さを座標系 S の観測者が測定して l の値を得るとする．

本論で得られた新しい変換式によれば，l_0 と l の間には，次の関係が成立する．

$$l = l_0 / \ \gamma_a = l_0 (1 + v^2/c^2)^{1/2} \qquad (\mathrm{II}.\ 12)$$

この式より，原子内を速さ v で運動する粒子は，進行方向に伸びることが分かる．

また，座標系 S で時間 t_0 が経過するとき，座標系 S′ で時間 t が経過するとする．このとき，t_0 と t の間には，次の関係が成立する．

$$t = t_0 / \ \gamma_a = t_0 (1 + v^2/c^2)^{1/2} \qquad (\mathrm{II}.\ 13)$$

この式より，運動する粒子の座標系では，時間の経過は早くなることが分かる．

Ⅲ．結論

１．原子内で運動する電子は，速さが増すにつれ，全エネルギーは減少し，質量も軽くなることが分かった．これは，特殊相対論の予測とは異なる結果を与える．

粒子の運動がマクロな空間のものか，それとも，原子内のミクロな空間のものかにより，適用できる関係式が異なることが明かになった．

しかし，電子の長さが実際に伸び，また，電子の座標系で経過する時間が実際に進むのか，本論は明確な立場は表明できない．

何故ならば，電子は大きさを持たない素粒子と考えられているため，電子の長さが伸びるという物理的な意味が不明である．

また，時間の経過についても，電子は寿命を持たないと考えられているため，時間が進むという意味が不明である．

しかし，原子外から運動してきた粒子が原子内を通過する際には，(Ⅱ．12) と (Ⅱ．13) の関係式が適用できると考えられる．

いま, (Ⅰ．6) と (Ⅱ．12) および, (Ⅱ．13) から, ml と mt を求めると，次の関係が成立する．

$$ml = m_0 l_0 = const \tag{Ⅲ．1}$$

$$mt = m_0 t_0 = const \tag{Ⅲ．2}$$

この式から，粒子の運動が原子内のものか，原子外のものかによらず，質量または，全エネルギーが n 倍になると粒子の進行方向の長さとその粒子の座標系で経過する時間は，$1/n$ 倍になることが分かる．

(Ⅲ．1) と (Ⅲ．2) があらゆる場合に成立するならば，電子が広がりと寿命を持つ粒子である可能性も排除できなくなる．

特殊相対論は，物体の長さと物体の座標系で経過する時間は，物体の速度に依存すると主張する．しかし，本論は，物体の長さと物体の座標系で経過する時間は，物体の質量や全エネルギーに依存すると考える方がより本質的であると結論する．

２．原子内の電子の速度が増すと質量が減少することから，原子内では，光速が自然界の上限速度として機能しなくなる．

ここで，全エネルギー $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ab}}$ が最低値 $m_0c^2/2$ を持つときの電子の速さを求めてみよう[3]．

(Ⅰ．1) の $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ab}}$ に $m_0c^2/2$ を代入すると，

$$(m_0c^2/2)^2 + c^2p^2 = (m_0c^2)^2 \tag{Ⅲ．3}$$

また，(Ⅰ．3) から，

$$p^2 = m^2v^2 \tag{Ⅲ．4}$$

（Ⅲ．4）の p^2 と（Ⅰ．6）の m_0 を（Ⅲ．3）に代入して整理し，プラスの値を採用すると，次の値が得られる．

$$v = 3^{1/2}c \qquad \text{（Ⅲ．5）}$$

電子が原子核に近づくと電子の速さは光速を超えることが予想できる．このとき，電子は超光速で運動する粒子タキオンとして振舞うことになる．タキオンとは未知の粒子ではなく，既知の粒子がある条件下でタキオンとして振舞うのである．

原子内の電子の状態を波動関数で記述する場合，電子がタキオンとして振舞う領域でも，電子を検出する確率はゼロではない．従って，本論のアプローチによれば，タキオンの存在を予測できるのである．

参考文献

[1] 須藤晃俊「水素原子内における特殊相対論の関係式の修正とボーア半径」

[2] A. P. フレンチ：MIT 物理「特殊相対性理論」 p 73，培風館

[3] 須藤晃俊「水素原子内における特殊相対論の関係式の修正とボーア半径」