古典力学と特殊相対論から導く原子の安定性

須藤晃俊

Abstract

水素原子の基底状態のエネルギーは，量子力学でなければ確定できない．しかし，原子の安定性だけならば，量子力学を用いなくても説明できる．

本論の古典論的な考察によっても，水素原子内の電子には立ち入り禁止の境界r_eが存在することが明らかになる．

1. 序　論

水素原子の全エネルギーを古典力学で記述するときは，ポテンシャル・エネルギーと電子の運動エネルギーが必要である．

一方，量子力学で水素原子のエネルギーを論じるときは，全エネルギーの増減だけが問題となる．

ボーアは量子条件という仮定を設けることで，電子の軌道半径を導いた．さらにボーアは電子の全エネルギーには最低ラインがあり，電子は原子核に吸収されないことを説明した．

しかし，本論では原子の安定性を量子力学以外の方法で説明できるか否かを検討するために，古典力学的なアプローチを試みる．

2. 古典力学で記述する電子のエネルギー

本章では水素原子内の電子のエネルギーを古典論の観点から議論する．

原子核は電子に比べて充分重いから静止していると考えられる．そして，原子核の周りを電荷$-e$，質量 m を持つ電子が半径 r の軌道上を速度 v で運動している状況を考える．

このとき運動方程式は次の式で記述できる．

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.1}$$

これより次の式が導ける．

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.2}$$

一方，電子のポテンシャル・エネルギーは次の式で記述される．

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.3}$$

式(2.2)の右辺はポテンシャル・エンルギーの–1/2 倍であるから，式(2.2)は次のようになる.

$$2\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -V(r) \tag{2.4}$$

それ故，電子の全エネルギーは次の式で記述される.

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + V(r) \\ &= -\frac{mv^2}{2} \\ &= -K \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで K は電子の運動エネルギーを表している.

式(2.5) のポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーの差異の原因は，電子が放出する光子のエネルギー$\hbar\omega$であると考えられる. このことから次のエネルギー保存則が成立する.

$$\begin{aligned} &V(r) + K + \hbar\omega = 0 \\ &\quad \text{ただし，} -K + \hbar\omega = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. 特殊相対論を考慮した電子のエネルギー

１個の電子がマクロの自由空間に静止している場合を考える. この状況では電子が持つエネルギーは静止質量エネルギーだけである.

いまこの電子に外力が加わると電子は運動を始めるが，このとき電子の運動エネルギー(K)と全エネルギー(E)は増加する.

しかしながら，静止していた電子が原子内に取り込まれる場合は状況が異なってくる. この場合，電子は外部にエネルギーを放出して，原子内のより低いエネルギー準位に遷移する. ここでは電子は運動エネルギーを獲得するが，全エネルギーは減少する.

既存の理論によれば，電子の全エネルギーは電子を原子核から無限遠の距離まで引き離し，その位置に静止した状態をゼロと定めている.

式(2.5) の全エネルギーはこの観点から得られた相対的な値である.

しかしながら，電子を原子核から引き離し無限遠の自由空間に静止させたとしても，電子の全エネルギーは本質的にゼロとはならない. アインシュタインによれば，この状態にある電子は静止質量エネルギーE_0を持つはずである.

この電子が陽子，すなわち水素原子の原子核の引力を受けると，電子は水素原子の領域に引き込ま

れる．このとき電子は光子を放出し，より低いエネルギー準位に遷移するが，運動エネルギーを獲得する．

さらに電子は獲得したエネルギーと同量のエネルギーを光子の形で原子外へ放出する．

これらの状況と式(2.6)を考慮すると，次の関係が成立することが分かる．

$$\left(E_0+V(r)\right)+K+\hbar\omega=E_0 \tag{3.1}$$

エネルギー保存則を満たすためには，増加した電子の運動エネルギーと外部へ放出した光子のエネルギーを供給するエネルギー源が必要である．

通常ポテンシャル･エネルギーの値は相対的に記述されるが，自由空間に静止している電子のポテンシャル･エネルギーの値は絶対的な意味でゼロである．

式(3.1) ではこのエネルギー源は一見ポテンシャル･エネルギーと考えられるが，当初静止していた状態で存在しなかった物理量が，減少すると考えることは困難である．

そこで本論は，古典力学において我々が水素原子のポテンシャル･エネルギーと呼んでいた物理量には，電子の静止質量エネルギーの減少分が対応しているとの仮説を立てる．

このように考えると，静止状態の電子には存在しなかったポテンシャル･エネルギーが，減少することも可能になる．

ここで減少分のエネルギーを－$\triangle E_0$で表すと，次の 2 式が成立する．

$$\begin{aligned} V(r) &= -\Delta E_0 \\ &= -\left(K+\hbar\omega\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$-\Delta E_0+K+\hbar\omega=0 \tag{3.3}$$

以上の状況は以下の表にまとめることができる．

i	ii	iii	iv	v	vi	vii
a	吸収する	$E=E_0+K$	$K=\hbar\omega$	成 立	なし	―
b	放出する	$E=E_0-K$	$-K=-\hbar\omega$	不成立	$K+\hbar\omega$	静止質量エネルギー

表. 1 原子外と原子内の電子のエネルギーの比較

i. 孤立系に静止している電子(静止質量エネルギー E_0)

a. 静止状態にある電子が光子を吸収し，マクロな空間で運動を始める場合．

b. 静止状態にある電子が光子を放出し，水素原子内に吸収される場合．

ii. 光子のエネルギー $\hbar\omega$ の授受．

iii. 電子の全エネルギー E

iv. 電子が獲得する運動エネルギー K

v. エネルギー保存則の成立，不成立．

vi. エネルギー保存則からの差異.

vii. vi の差異を解消するためのエネルギー源.

4. ディスカッション

式(3.2)の定義から $V(r)$の値は次の不等式を満たさなければならない.

$$0 \geq V(r) \geq -m_0 c^2 \tag{4.1}$$

したがって, ポテンシャル・エネルギーには最少値が存在し, このとき次の関係が成立する.

$$-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathrm{e}} = -m_0 c^2 \tag{4.2}$$

この関係を満たす位置rが, 電子が原子の中心にどこまで近づけるかを示す最短近接距離r_eである.
式(4.2)よりr_eは次の値になる.

$$\begin{aligned} r_\mathrm{e} &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \\ &= r_\mathrm{c} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここでr_cは古典電子半径である.
ところで, 古典量子論によれば水素原子の軌道半径は次の式で表される.

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{4.4}$$

ここで, $n = 1$ の値がボーア半径であり, これには水素原子の基底状態が対応している. いま試みに式(4.4) にr_cを組み込むと次の式が得られる.

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}{e^2}\right)^2 n^2 \\ &= \frac{r_\mathrm{c}}{\alpha^2} n^2 \qquad (n=1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで α は微細構造定数で次の式で記述される.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \tag{4.6}$$

古典量子論の概念である水素原子の軌道半径は，古典電子半径と微細構造定数と主量子数を用いるとよりシンプルに記述できる.

次は水素原子のエネルギーについて考察する.

さて，電子の静止質量エネルギーと主量子数 n の状態にある全エネルギーは，次の式で表される.

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{4.7}$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_0 e^4}{\hbar^2 n^2} \tag{4.8}$$

これらの 2 つの式から次の式が得られる.

$$\begin{aligned} E_n &= -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\right)^2 \frac{m_0 c^2}{2n^2} \\ &= -\frac{\alpha^2 E_0}{2n^2} \qquad (n=1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{4.9}$$

5. 結 論

本論では，古典力学において我々がポテンシャル・エネルギーと呼んだ物理量には，電子の静止質量エネルギーの減少分が対応している，との仮説を立てた.

式(3.3)によれば，減少した静止質量エネルギーの 1/2 は，光子のエネルギーとして原子外へ放出され，残りの 1/2 は電子の運動エネルギーに転化する.

光子のエネルギーと電子の運動エネルギーがそれぞれ$m_0c^2/2$ に達すると，電子の静止質量エネルギーは，全て他のエネルギーに転化したことになる. 電子はこれ以上の運動エネルギーを獲得することはできないし，ポテンシャル・エネルギーを減少させることもできない.

原子の安定性はボーアの古典量子論によってはじめて解明された.

しかし，本論の古典論的な考察は，水素原子内の電子には立ち入り禁止の境界r_eが存在することを明らかにした. さらにこの最短近接距離は，古典電子半径と一致する.

この値は古典量子論が予測する値，すなわちボーア半径とは異なるが，古典論的なアプローチによっても原子の安定性は説明できるのである.

ただし，本論は量子力学に対して疑念を表明している訳ではない.

本論は原子の安定性は，量子力学以外の理論によっても説明できることを示したに過ぎない.