アインシュタインの質量－エネルギーの関係式の適用限界

量子力学によれば，水素原子内の電子の運動エネルギー K と全エネルギー E の関係は，$E= -K$，である．

また，原子内の電子の速度が光速に達することはないので，$(K^2=)E^2 < E_0^2(=m^2c^4)$

この事実から，原子内の空間では，アインシュタインの質量－エネルギーの関係式 ($E^2=c^2p^2+E_0^2$，ここでは，$E^2 > E_0^2$) は，修正を迫られることになる．

本論では，アインシュタインの関係式に替わる新たな関係式を導く．

I. 序論

特殊相対論の重要な関係式に，以下の式がある．

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \tag{I.1}$$

E は物体または粒子の全エネルギーであり，E_0 は静止質量エネルギー mc^2 である．

しかし，式 (I.1) は，粒子の運動量とエネルギーの関係式であるから，この式は非相対論的な運動の場合にも成立する．式 (I.1) は，特殊相対論を包含するより一般的な関係式である．

さて，粒子がマクロな空間で運動するとき，それが孤立系であるならば，電子の速度が増して運動エネルギーが増加すると全エネルギーも増加する．

このことから，

$$E^2 > E_0^2 \tag{I.2}$$

しかし，量子力学によれば，水素原子内の電子の全エネルギー E と運動エネルギー K の関係は，

$$E = -K \tag{I.3}$$

さらに，電子の速度は，光速に到達し得ないから，

$$K < E_0 \tag{I.4}$$

それ故，原子内では次の関係が成立する．

$$E^2 < E_0^2 \tag{I.5}$$

この事実から，原子内の空間では，アインシュタインの質量－エネルギーの関係式 (I.1) は成立しないことがわかる．

次章では，式 (I.1) に替わる新たな関係式を導く．

II. 水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係

水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を特殊相対論の教科書を参考にして導くことにする[1].

古典力学では，運動エネルギーの増加は，外力によってなされた仕事に対応する.

すなわち，

$$dK = Fdx = (dp/dt)\, dx = vdp \tag{II.1}$$

また，マクロな空間を運動する粒子の全エネルギーの増加分と運動エネルギーの増加分は，位置のエネルギーの増減がない場合には等しい.

すなわち，

$$dE = dK \tag{II.2}$$

これより，

$$dE = vdp \tag{II.3}$$

ところが，原子内で運動する電子の場合，式 (I.3) より全エネルギーの減少分と運動エネルギーの増加分が等しい．すなわち，

$$-dE = dK \tag{II.4}$$

この式と式 (II.1) より，

$$dE =-vdp \tag{II.5}$$

ところで，式 (I.1) は式 (II.3) から導かれるが，水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係は，式 (II.5) から導くべきである.

さて，古典力学では，

$$m = p/v \tag{II.6}$$

また，特殊相対論では，

$$m=E/c^2 \tag{II.7}$$

式 (II.6) と式 (II.7) から，

$$E = c^2p/v \tag{II.8}$$

次に式 (II.5) と式 (II.8) の右辺どうし，左辺どうしを乗じると，

$$EdE =-c^2pdp \tag{II.9}$$

これを積分すると，

$$E^2+c^2p^2 = E_0^{\,2} \tag{II.10}$$

ここで，$E_0^{\,2}$ は，エネルギーの二乗の形で示される積分定数である.

III. エネルギー E の意味

式 (II.10) のエネルギー E は何を意味するのであろうか.

式 (II.10) では，電子の運動エネルギーと運動量が増加して c^2p^2 が増加すると，E^2 は減少する.

しかし，量子力学においては式 (I.3) から，水素原子内の電子の運動エネルギーや c^2p^2 が増加すると E^2 も増加する.

したがって，式 (II.10) の E には，従来のもの [式 (I.3)] とは異なる定義をしなければばならない.

古典力学は，絶対エネルギーではなく，エネルギーの差を重視する．しかし，本論では電子のエネルギーの絶対量を考慮することにする.

既存の理論では，電子の全エネルギーをゼロとみなすのは，電子を原子核から無限に引き離し，その場所に静止させた場合である．式 (I.3) の全エネルギーは，その観点から得られた値である.

しかし，無限遠の位置に電子を静止させた場合でも，電子の絶対的なエネルギーは本来ゼロではなく，電子は静止質量エネルギー E_0 を持つはずである.

このことと式 (I.3) を考慮して，水素原子内の電子の絶対的な意味における全エネルギー E_{ab} を以下のように定義する.

$$E_{ab}=E_0-K \tag{III.1}$$

本論は式 (II.10) の左辺のエネルギー E を式 (I.3) の全エネルギーではなく，式 (III.1) で定義した全エネルギー E_{ab} と見なす.

すると式 (II.10) は次のようになる.

$$E_{ab}{}^2 + c^2p^2=E_0{}^2 \tag{III.2}$$

この場合，電子の運動エネルギーと運動量が増加すると，c^2p^2 は増加するが，式 (III.1) の右辺は減少するから，$E_{ab}{}^2$ は減少する.

この関係式は，水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を示していると考えられる．本論はアインシュタインの質量－エネルギーの関係式とは異なる結果を得た.

IV. 結論

マクロな空間では，アインシュタインの関係式(I.1)：

$$E^2 = c^2p^2+E_0^{\ 2}$$

が成立する.

一方，水素原子内の空間では，式(Ⅲ.2)：

$$E_{ab}^{\ 2}+c^2p^2 = E_0^{\ 2} \ \ (\text{ここで，} E_{ab}=E_0-K)$$

が成立する.

本論の考察により，アインシュタインの質量－エネルギーの関係式には，適用限界が存在することが分かった.

参考文献

[1] A. P. フレンチ：MIT 物理「特殊相対性理論」，18 ページ，培風館

追 記

原子内の電子のふるまいを記述する理論は量子力学であるから，式(III.2)には最低でも，主量子数 n が組み込まれるべきである．つまり，次のような関係式が示されるべきであろう.

$$(E_0+E_n)^2+c^{\ 2}p_n^{\ 2}=E_0^{\ 2} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

さて，E_0 と E_1 は次の式で表される.

$$E_0= m_0c^{\ 2} \tag{2}$$

$$E_1= -(1/2)(1/4\pi\varepsilon_0)^{\ 2}(m_0e^4/\hbar^2) \tag{3}$$

この二式から，次の関係が得られる.

$$E_1= -(\alpha^2/2)E_0 \tag{4}$$

ただし，αは微細構造定数で，次の式で表される.

$$\alpha=e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) \tag{5}$$

一方，E_1 と E_n の間には次の関係がある．

$$E_n = E_1/n^2 \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{6}$$

したがって，式 (4) と式 (6) から E_n は次のようになる．

$$E_n = -(\alpha^2/2\,n^2)E_0 \tag{7}$$

この値を式 (1) に代入すると，次の式が得られる．

$$\{1-(\alpha^2/2n^2)\}^2 E_0^{\,2} + c^{\,2} p_n^{\,2} = E_0^{\,2} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{8}$$

この関係式が式 (III.2) に量子数 n を組み込んだ式である．この式はエネルギー準位が縮退した系にある電子のエネルギーと運動量の関係を示している．