

アインシュタインのエネルギー—運動量の関係式の適用限界

須藤 晃 俊

Abstract

一つの粒子がマクロな空間で運動するとき、その系が孤立系であるならば、粒子の速度が増加すると、粒子の運動エネルギー(K)と全エネルギー(E)は増加する。

しかしながら、古典量子論によれば、水素原子内で運動する電子の運動量と運動エネルギーが増加すると、全エネルギーは減少する。

この事実から、水素原子内では、アインシュタインのエネルギー—運動量の関係式、 $E^2=c^2p^2+E_0^2$ は成立しないことが分かる。

本論では、この関係式に替わる新しい関係式、 $(E_0+E_n)^2+c^2p_n^2=E_0^2$ ($n=1,2,\dots, E_n<0$)を導く。

1. 序 論

一般に原子内の電子のふるまいを記述する物理学は、量子力学であると考えられている。

本論もそれについて異論はないが、本論ではさらに“アインシュタインのエネルギー—運動量の関係式”は、原子内の空間でも成立するか？との設問を設け、回答を試みる。(Appendix A 参照)

この設問は、本来アインシュタインが上記の関係式を発表した頃、すなわち、量子力学が未完成であった時代(1920年前後)に設定し、解決すべきであった。

このような事情から、完成された量子力学を用いない本論の議論も、正当化されよう。

さて、特殊相対論の重要な関係式に、次の式がある。

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \quad (1.1)$$

ここで E は物体または粒子の全エネルギーであり、 E_0 は静止質量エネルギー m_0c^2 である。

いまマクロな自由空間に電子が1個静止している状態を考える。この場合、電子は静止質量エネルギーを持っている。この電子に外部からエネルギーを与えると、電子は自由空間で運動を始める。このとき電子の運動エネルギーと全エネルギーは増加するが、この状況は関係式(1.1)で記述される。

このことから、次の関係が成立する。

$$E^2 > E_0^2 \quad (1.2)$$

ところが、静止していた電子が原子内に取り込まれる場合には、状況が異なってくる。電子

は原子外へ光子を放出すると、より低いエネルギー準位に遷移する。このとき、電子の運動エネルギーは増加するが、全エネルギーは減少する。この状況は、アインシュタインの関係式(1.1)では記述できない。

一方、古典量子論によれば、水素原子内の電子の全エネルギー E_n と運動エネルギー K の関係は、次の式で表される。

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{K_1}{n^2} \quad (n=1,2,\dots) \quad (1.3)$$

ここで n は主量子数である。

この場合、電子の全エネルギーは、マイナスの値を持つ。(Appendix B 参照)

それ故、式(1.3)の全エネルギーは、絶対的な尺度から得られた値ではない。

古典力学では、絶対エネルギーではなく、エネルギーの差を重視する。しかし、本論では電子のエネルギーの絶対量を考慮する。

既存の理論では、電子の全エネルギーをゼロとみなすのは、電子を原子核から無限に引き離し、その場所に静止させた場合である。式(1.3)の全エネルギーは、その観点から得られた値である。

しかし、原子核から無限遠の位置に電子を静止させた場合でも、電子の絶対的なエネルギーは本来ゼロではない。アインシュタインによれば、電子はこのとき、静止質量エネルギー E_0 を持つはずである。

その電子が水素原子の領域に入るとしよう。このとき電子は、より低いエネルギー準位に遷移することによって、増加した運動エネルギーと同量のエネルギーを光子として原子外に放出する。

エネルギー保存則を成立させるためには、増加した運動エネルギーと放出した光子のエネルギーを供給するエネルギー源が必要となる。

本論はそのエネルギー源は、電子の静止質量エネルギー E_0 であるとみなす。

以上の状況をまとめると以下の表のようになる。

i	ii	iii	iv	v	vi	vii
a	吸収する	$E = E_0 + K$	$K = \hbar\omega$	成立	なし	—
b	放出する	$E = E_0 - K$	$-K = -\hbar\omega$	不成立	$K + \hbar\omega$	静止質量エネルギー

表 1. 原子外と原子内の電子のエネルギーの比較

- i. 孤立系に静止している電子(静止質量エネルギー E_0)
 - a. 静止状態にある電子が光子を吸収し、マクロな空間で運動を始める場合.
 - b. 静止状態にある電子が光子を放出し、水素原子内に吸収される場合.
- ii. 光子のエネルギー $\hbar\omega$ の授受.
- iii. 電子の全エネルギー E
- iv. 電子が獲得する運動エネルギー K
- v. エネルギー保存則の成立, 不成立.
- vi. エネルギー保存則からの差異.

vii. vi の差異を解消するためのエネルギー源.

この事実から、本論では水素原子内の電子の絶対的な意味でのエネルギー E_{ab} を次のように定義する.

$$\begin{aligned} E_{ab} &= E_0 + E_n \\ &= E_0 + \frac{E_1}{n^2} \end{aligned}$$

(ここで, $n=1,2,\dots, E_n < 0$) (1.4)

絶対的な尺度で測定すると、水素原子内の電子の全エネルギーの値は、電子の静止質量エネルギーよりも少ないのである.

本論の定義から、次の関係が必然的に導ける.

$$E_{ab}^2 < E_0^2 \tag{1.5}$$

この事実から、我々は水素原子内の空間では、アインシュタインのエネルギー-運動量の関係式(1.1)を修正しなければならない.

それ故に、我々は次章において、水素原子内で適用できる新たな関係式を導くことにする.

2. 水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係

水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を、特殊相対論の教科書を参考にして導くことにする. [2]

古典力学では、運動エネルギーの増加は、外力によってなされた仕事に対応する. すなわち、

$$dK = Fdx = \frac{dp}{dt} dx = vdp \tag{2.1}$$

また、マクロな空間を運動する粒子の全エネルギーの増加分と運動エネルギーの増加分は、位置エネルギーの増減がない場合には等しい.

すなわち、

$$dE = dK \tag{2.2}$$

これより、次の関係が得られる.

$$dE = vdp \quad (2.3)$$

ところが、水素原子内で運動する電子の場合には、式(B.5)より全エネルギーの減少分と運動エネルギーの増加分が等しい。すなわち、

$$-dE_{ab} = dK \quad (2.4)$$

この式と式(2.1)より、

$$dE_{ab} = -vdp \quad (2.5)$$

ところで、式(1.1)は式(2.3)から導かれるが、水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係は、式(2.5)から導くべきである。

さて、古典力学では、

$$m = \frac{p}{v} \quad (2.6)$$

また、特殊相対論から、

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (2.7)$$

式(2.7)の関係式は、水素原子内でも成立すると仮定する。すなわち、

$$m = \frac{E_{ab}}{c^2} \quad (2.8)$$

式(2.6)と式(2.8)から、

$$E_{ab} = \frac{c^2 p}{v} \quad (2.9)$$

次に式(2.5)と式(2.9)の右辺どうし、左辺どうしを乗じると、

$$E_{ab} dE_{ab} = -c^2 p dp \quad (2.10)$$

これを積分すると、

$$E_{ab}^2 + c^2 p^2 = E_0^2 \quad (2.11)$$

ここで、 E_0^2 はエネルギーの2乗の形で示される積分定数である。この関係式は、水素原子内の電子のエネルギーと運動量の関係を表している。

式(1.4)は、非相対論的な式であるが、この式を相対論の関係式(2.11)に代入することは、非相対論的な関係式と相対論的な関係式との混用との疑念が生じるかも知れない。

しかし、関係式(1.1)は、通常相対論的な関係式とされているが、実際には何ら相対論的な要請を行わなくても、導ける式である。

この式は、非相対論的な速度で運動する粒子のエネルギーと運動量についても適用できるより一般的な式である。ただし、非相対論的な粒子の運動を記述する場合には、近似的に、 $E(v) \approx E_0 + (1/2)(E_0/c^2)v^2$ が適用できるため、式(1.1)を使わなくてもことが足りるのである。

また、式(2.11)の場合にも、同じ論理が適用できる。

したがって、式(1.4)と式(2.11)から、次の関係式が得られる。

$$(E_0 + E_n)^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2 \quad (n=1, 2, \dots, E_n < 0) \quad (2.12)$$

さて、 E_0 と E_1 は次の式で表される。

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (2.13)$$

$$E_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_0 e^4}{\hbar^2} \quad (2.14)$$

この2式から、次の関係が得られる。

$$E_1 = -\frac{\alpha^2 E_0}{2} \quad (2.15)$$

ただし、 α は微細構造定数で、次の式で表される。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad (2.16)$$

一方、 E_1 と E_n の間には次の関係がある。

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

したがって、式(2.15)と式(2.17)から E_n は次のようになる。

$$E_n = -\frac{\alpha^2 E_0}{2n^2} \quad (2.18)$$

この値を式(2.12)に代入すると、次の式が得られる。

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right)^2 E_0^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2 \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.19)$$

この関係式が式(2.11)に量子数 n を組み込んだ式である。この式はエネルギー準位が縮退した系にある電子のエネルギーと運動量の関係を示している。

3. 水素原子内電子の軌道半径

本章では、前章で得られた式(2.12)から物理学に新たな進展があるか考察する。古典量子論によれば、水素原子の半径 r_n とエネルギー E_n は次の式で与えられる。

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \quad (n=1,2,\dots) \quad (3.1)$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (n=1,2,\dots) \quad (3.2)$$

それでは、本論の立場では、 r_n と E_n は、どのような値になるであろうか。まず、式(2.12)から p_n として次の値を得る。

$$p = \frac{1}{c} (-2E_0 E_n - E_n^2)^{1/2} \quad (3.3)$$

ところで、ボーアの量子条件は次の式で表される。

$$p_n \times 2\pi r_n = 2\pi n \hbar \quad (3.4)$$

式(3.4)の運動量に式(3.3)の値を代入すると、

$$\frac{1}{c} (-2E_0 E_n - E_n^2)^{1/2} r_n = n \hbar \quad (3.5)$$

両辺を 2 乗し、式(1.3)の関係を利用すると、

$$\left\{ -\frac{2E_0 E_1}{n^2} - \left(\frac{E_1}{n^2} \right)^2 \right\} r_n^2 = n^2 \hbar^2 c^2 \quad (3.6)$$

式(B.2)の右辺の値を式(3.6)の E_1 に代入し、 r を r_n に換えると次の式が得られる。

$$\left\{ -2m_0 c^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \right)^2 \right\} r_n^2 = n^2 \hbar^2 c^2 \quad (3.7)$$

この式を r_n について解くと、次の値が得られる。

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} + \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_0 e^2} \\ &= \frac{r_e}{4} + \frac{1}{r_e} \left(\frac{\lambda_c}{2\pi} \right)^2 n^2 \\ &= \frac{r_e}{4} + a_B n^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで、 r_e は古典電子半径、 λ_c は電子のコンプトン波長で、それぞれ次の式で与えられる

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \quad (3.9)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} \quad (3.10)$$

本論式(3.8)で求めた半径には、古典量子論から導かれる値の他に $r_e/4$ の項が追加されている。

また、 $n=1$ の場合の半径は、次のようになる。

$$r_1 = \frac{r_e}{4} + a_B \quad (3.11)$$

ただし、 a_B はボーア半径。(Appendix C 参照)

4. 新関係式の量子化

本論の目的は全章までで一応達成したが、今後の展開も踏まえ、新しく得られた関係式

(2.11) の量子化を試みる.

ところで, 式(1.1)に量子化の手続き,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (4.1)$$

を施すと, 次のクライン-ゴールドン方程式が得られるのは, 周知のことである.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi + m^2 c^4 \psi \quad (4.2)$$

この方程式は, 波動関数を相対論的に解釈したものであるが, この解釈は一般的なシュレ-ディンガー方程式の波動関数の解釈と, つじつまが合わなかった.

ディラックはこの欠陥を解消するための正しい方程式は, 次のような形式であるに違いないと推測した。[3]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left\{ -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta mc^2 \right\} \psi \quad (4.3)$$

そして, ディラックはこの新しい方程式はクライン-ゴールドン方程式を満たしているはずだから, そうなるように未知の係数 α_i と β を決めてやれば良いと考えた.

いま式(2.11)に量子化の手続きを施すと次の式が得られる.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi + m^2 c^4 \psi \quad (4.4)$$

式(4.3)の演算子の部分のみを取りだし, 両辺を 2 乗した方程式を作ると, 次の式が得られる.

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = & \left\{ -\hbar^2 c^2 \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \right. \\ & - i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \beta mc^2 \\ & \left. - \beta mc^2 i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta^2 m^2 c^4 \right\} \psi \end{aligned} \quad (4.5)$$

この式の左辺はクライン-ゴルドン方程式や式(4.4)と同じになるから、この右辺が最終的に式(4.4)の右辺と同じになれば良い訳だ。

式(4.5)の右辺を展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = & \left\{ -\hbar^2 c^2 \left(\alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \alpha_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) - \hbar^2 c^2 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right. \\
 & - \hbar^2 c^2 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \hbar^2 c^2 (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \\
 & - i\hbar m c^3 (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) \frac{\partial}{\partial x_1} - i\hbar m c^3 (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \\
 & \left. - i\hbar m c^3 (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \beta^2 m^2 c^4 \right\} \psi
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

式(4.4)と式(4.6)が同じになるためには、係数 α_i 及び β は、次の条件を満足する 4 行 4 列のマトリックスでなければならない。

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_i^2 &= -1 \\
 \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0 \\
 \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\
 \beta^2 &= 1
 \end{aligned} \right\} i, j = 1, 2, 3 (i \neq j) \tag{4.7}$$

この条件を満たし、しかもすっきりした組み合わせのものは、次のようなものである。

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \beta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

一方、ディラックが得た係数 α_i と β は、次のようなものであった。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \beta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

クライン-ゴルドン方程式の ψ は一成分であったが、このような行列を含む方程式が成り立つためには、波動関数 ψ 自体が 4 つの成分を持つ必要がある。

すなわち、

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

本論で求めた式も、従来のディラック方程式同様、4 つの状態がお互いに絡み合う形の方程式になっている、ただそれぞれの状態の意味について論ずることは、本論の目的ではないので、ここでは省略する。

5. 結論

1. 我々はアインシュタインのエネルギー—運動量の関係式とは、異なる結果を得た。

マクロな空間では、式(1.1):

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2$$

が成立する。

しかしながら、水素原子内では、式(2.12)と式(2.19)式:

$$(E_0 + E_n)^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2 \quad (\text{ただし, } n=1, 2, \dots, E_n < 0)$$

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right)^2 E_0^2 + c^2 p_n^2 = E_0^2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成立する.

アインシュタインのエネルギー-運動量の関係式には, 適用限界が存在する.

2. 式(3.8)で新たに追加された項 $r_e/4$ は, 原子核, すなわち陽子の半径に関係していると考えるのが自然である. 原子核の大きさ $r_e/2$ は, 1.41×10^{-15} mとなる. 今日では原子核の大きさは, 質量をAとすれば, $(1.2 \times 10^{-15}) A^{1/3}$ mでよく表わされることが分かっているが, 2つの値はよく一致している.

3. 本論ではディラック方程式の係数として, 従来のもとは異なる値(4.8)を得たが, これはディラック方程式を否定するものではなく, 本論で得られた係数を持つ式も, ディラック方程式の一つであると考えられる.

4. ド・ブロイが物質波の存在を予測したときに使った論法を参考にすると, 大きさのない粒子と考えられている電子の大きさについて, 議論することが可能になる.

本論の考察で, 陽子の大きさには電子の質量 m_e が関与していることに気づいた.

ここで, 電子の大きさに陽子の質量 m_p が関与していると仮定すると, 電子の半径 r_{el} は次の式で表される.

$$\begin{aligned} r_{el} &= (1/4)e^2 / (4\pi\epsilon_0 m_p c^2) \\ &= r_p m_e / m_p = 3.84 \times 10^{-19} \text{ m} \end{aligned} \quad (5.1)$$

5. 量子力学の伝統的な解釈とされているコペンハーゲン解釈によれば, ミクロの粒子, すなわち, 量子はその位置が観測によって確定するまでは, 波のように振る舞う.

しかし, その位置が観測された瞬間, 粒子としての位置が確定する.

しかしながら, 本論では陽子と電子の大きさを相互作用を伴う実験によってではなく, 計算によって決定した.

このことは, 量子の一種である陽子と電子は, たとえその位置が観測によって確定しなくても, 粒子としてある場所に局在化していることを意味している.

ところで, 有名な電子による2つのスリットを使った干渉実験において, 伝統的な解釈は次のようである.

『1個の独立した電子は, あたかも2つのスリットを同時に通過してきたように振る舞う』

しかしながら, 本論では次のように結論する. すなわち,

『1個の電子は, 粒子としてどちらか1つのスリットを通過するが, 検出器によって検出される電子の位置の確率分布は, 最終的に干渉模様を描く』

もし本論の予測が正しいとすれば, コペンハーゲン解釈は修正されなければならない.

6. 本論は, Appendix A において, 式(A.2)が成立しないことを指摘した.

しかし, 式(A.2)に現れる E が式(1.3)の E ではなく, 式(1.4)の E_{ab} であると仮定すると, 状況は異なってくる.

この場合、式(A.2)の左辺は次のようになる。

$$\begin{aligned}(E-V)^2 &= (E_0 - K - V)^2 \\ &= (E_0 + K)^2\end{aligned}\tag{5.2}$$

これより、式(A.2)は次のようになる。

$$(E_0 + K)^2 = c^2 p^2 + E_0^2\tag{5.3}$$

この式は、アインシュタインの関係式(1.1)そのものである。

しかし、この式が意味するところは、自由空間における電子のエネルギーと運動量の間
の関係であって、原子内における電子のエネルギーと運動量の間関係ではない。

Appendix A

Gasiorowicz は静止質量エネルギーを持ち、中心から引きつけられて束縛状態にある、水
素原子内の電子のシュレーディンガー方程式の相対論的な類推を議論した。[1]

この方程式は、

$$\left(\frac{E}{\hbar c} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c r} \right)^2 \psi = -\nabla^2 \psi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi\tag{A.1}$$

であり、これは式(1.1)にポテンシャル・エネルギーが含まれるときの以下の式の演算子バー
ジョンである。

$$(E - V)^2 = c^2 p^2 + E_0^2\tag{A.2}$$

この方程式(A.1)を解くことによって得られた解は、実際の水素原子のエネルギー準位と一
致しなかった。電子はスピン 1/2 の素粒子で、クライン-ゴールドン方程式には従わないというの
が、その理由とされている。

しかし、それ以前の問題として、式(A.2)の左辺は次のようになる。

$$\begin{aligned}E - V &= K + V - V \\ &= K\end{aligned}\tag{A.3}$$

これより、 $K^2 > E_0^2$ 、すなわち、 $(p^2/2m)^2 > (m_0c^2)^2$ 、ということになるが、このような不等号は、
本来成立し得ない。したがって、本論では式(A.2)に代る関係式を探求する。

Appendix B

水素原子内の電子のエネルギーについて復習しよう。[江沢洋著『現代物理学』(朝倉書店)参照]

原子核は電子に比べて充分重いため静止していると考え。そして、電荷 $-e$ 、質量 m を持つ電子が点とみなした原子核を中心とした半径 r の円軌道上を、速さ v で運動している状態を考える。

この状況を記述する運動方程式は、次の式で与えられる。

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{B.1})$$

これより次の式が得られる。

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{B.2})$$

一方、電子のポテンシャル・エネルギーは、次の式で与えられる。

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{B.3})$$

式(B.2)の右辺は、ポテンシャル・エネルギーの $-1/2$ 倍だから、式(B.2)は次のように表せる。

$$2\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -V(r) \quad (\text{B.4})$$

故に電子の全エネルギーは、次のように表せる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + V(r) \\ &= -\frac{mv^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

この値は電子の運動量と逆の符号を持っている。

また電子の全エネルギーは、ポテンシャル・エネルギーの半分に等しい。

$$E = \frac{V(r)}{2} \quad (\text{B.6})$$

Appendix C

一方、アインシュタインの関係式(1.1)とボーアの量子条件(3.4)に基づくと、次の r_n の値が得られる。

$$r_n = -\frac{r_c}{4} + a_B n^2 \quad (\text{C.1})$$

この値が事実と一致するということは、困難である。

参考文献

- [1] Stephen Gasiorowicz, "Quantum Physics"(Wiley International Edition)
- [2] A.P.FRENCH, "Special Relativity" THE M.I.T INTRODUCTORY PHYSICS SERIES (W.W.NORTON&COMPANY, New York. London)
- [3] P.A.M.Dirac, "DERECTIONS IN PHYSICS"(John Wiley&Sons, Inc., New York)